Université de Rennes 1 — Année 2007-2008
UFR Mathématiques
MIPE L1, Module A01

Feuille d'exercices 1

Domaine de définition, parité, graphe

Exercice 1 Trouver le domaine de définition des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

$$\begin{array}{llllllll}
(a) & \tan(2x), & (b) & x^5-3x^2+2x-7, & (c) & \ln(1-x), & (d) & \ln(1-x^2),\\
(e) & \dfrac{1}{x^2-5x+6}, & (f) & \left|\ln(x)\right|, & (g) & \sqrt{x^2-3x-4}, & (h) & \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}},\\
(i) & \dfrac{1}{\ln(x^2-4)}, & (j) & \dfrac{1}{\sin(2x)}, & (k) & \dfrac{1}{x\,\cos(x)}, & (l) & \dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}.
\end{array}$$

Exercice 2 Trouver le domaine définition des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

$$(a)\quad \sqrt{x}, \qquad (b)\quad \sqrt{-x}, \qquad (c)\quad -\sqrt{x}, \qquad (d)\quad -\sqrt{-x},$$

Tracer leur graphe.

Exercice 3 Déterminer le domaine de définition et l'image, puis tracer la fonction

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathrm{Dom}(f)\subseteq\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \dfrac{2x+3}{x-5}\end{array}$$

Exercice 4 Tracer le graphe des fonctions de l'exercice 1 en utilisant une calculatrice ou Maple. Tenter de déduire du tracé quel est l'image de la fonction dans chaque cas.

Exercice 5 Parmi les fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes, lesquelles sont paires ou impaires ?

$$\begin{array}{llllll}
(a) & 5x^4-3x^2, & (b) & 2x^4-x^3+1, & (c) & \sin(x^3),\\
(d) & \sin^2(x^3), & (e) & \mathrm{e}^{|x|}, & (f) & \ln(|x|),\\
(g) & \tan(\sin(x)), & (h) & \mathrm{e}^{\sin(x)}, & (i) & \sin(\ln(x)).
\end{array}$$

Composées de fonctions

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Démontrer que

1. La composition $f \circ g$ de deux fonctions impaires est impaire.
2. La composition $f \circ g$ de deux fonctions paires est paire.
3. La composition $f \circ g$ d'une fonction paire et d'une fonction impaire est paire.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle données par $f(x) = \frac{3}{x}$ et $g(x) = \frac{2-x}{2+x}$. Trouver une expression simplifiée des fonctions $f \circ f, f \circ g, g \circ f$ et $g \circ g$. Pour chaque fonction on indiquera le domaine de définition.

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ Afin de trouver le graphe de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$ on pourra décomposer cette fonction en la composition de deux fonctions connues.

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle. On suppose que $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $(f \circ g)(x) = 3x - 4$. Déterminer $g(x)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle. On suppose que $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = 2x + 1$. Déterminer alors f.

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ Exprimer les fonctions numériques d'une variable réelle suivantes comme composées de 3 fonctions simples (c'est--dire de polynômes, de fractions rationnelles, racine carrée, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus, tangente) :

$$\begin{array}{llll} (a) & x \mapsto \sin(\sqrt{x^2+1}), & (b) & x \mapsto \ln(\sin(3x-1)), \\ (c) & x \mapsto e^{\tan^2 x}, & (d) & x \mapsto x^{\ln x} \end{array}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 12}}$ Exprimer les fonctions numériques d'une variable réelle suivantes comme composées et/ou somme et/ou produits de plusieurs fonctions simples (c'est--dire de polynômes, de fractions rationnelles, racine carrée, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus, tangente) :

$$\begin{array}{llll} (a) & x \mapsto \sin(\frac{1}{x}) - \cos(5x^2-2), & (b) & x \mapsto \ln(\sin(x-1)e^x), \\ (c) & x \mapsto e^{\tan x + \sin(3x)}, & (d) & x \mapsto x^{(x^x)} \end{array}$$

Remarque : on peut faire l'exercice avec seulement des composées de fonctions simples si on s'autorise les fonctions de plusieurs variables réelles.

Polynômes

$\boxed{\textbf{Exercice 13}}$ Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme P par le polynôme Q, dans chacun des cas suivants :

$(a)\quad P(x) = x^4 + 2x^2 + 1, \quad Q(x) = x^4 - 2x^2 - 1,$
$(b)\quad P(x) = x^3 + 1, \quad Q(x) = x + 2,$
$(c)\quad P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 7, \quad Q(x) = 2x + 5,$
$(d)\quad P(x) = x^5 - x^3 + x - 1, \quad Q(x) = x^2 + x - 3,$
$(e)\quad P(x) = x^6 - 1, \quad Q(x) = x^2 - x - 2,$
$(f)\quad P(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 + x, \quad Q(x) = x^3 + 2x^2 - 3.$

.

Exercice 14 Factoriser les polynômes suivants

$$\begin{array}{llll} (a) & x^3 + x^2 - 4x - 4, & (b) & x^3 + x^2 - x - 1, \\ (c) & x^3 + 2x^2 - 23x - 60, & (d) & x^6 - 1 \end{array}$$

Exercice 15 Démontrer que -2 est une racine de

$$P(x) = x^5 + 9x^4 + 32x^3 + 56x^2 + 48x + 16$$

Déterminer la multiplicité de cette racine sans factoriser le polynôme P.

Inéquations, valeur absolue

Exercice 16 Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{llll} (a) & |2x - 5| = 4, & (b) & |x^2 - 2x - 5| = 1, \\ (c) & |x^3 - 1| = 7, & (d) & |2x + 4| < 3, \\ (e) & |2x^2 - 5x - 4| \leq 3, & (f) & |x^2 + 5x| \geq 2. \end{array}$$

Exercice 17 Tracer le graphe des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

$$(a) \quad |x^2 - 5x + 6|, \qquad (b) \quad |\sin(2x)|, \qquad (c) \quad \left|\frac{x-2}{x+1}\right|$$

Indication : dans un premier temps, considérer les expressions sans valeurs absolues, et utiliser les identités $x^2 - 5x + 6 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$ ainsi que $\frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$.

Fonctions logarithmes, exponentielles, hyperboliques : calcul algébrique, simplification

Exercice 18 Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

(a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}$, $\quad$ (b) $\log_9\left(\frac{1}{27}\right)$,

(c) $\ln(1+\cos(x)) + \ln(1-\cos(x)) - 2\ln(\sin(x))$.

Exercice 19 Exprimer $\sinh(3x)$ à l'aide de $\sinh(x)$.

Exercice 20 Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

(a) $\cosh(\ln(x))$, $\quad$ (b) $\coth(\ln(x))$,

(c) $\dfrac{\cosh(\ln(x)) - \sinh(\ln(x))}{\cosh(\ln(x)) + \sinh(\ln(x))}$.

Applications, Injections, surjections

Exercice 21 Dans chacun des cas suivants indiquer dans le tableau si on a défini

- une application de A dans B,
- une injection de A dans B,
- une surjection de A dans B.

$A = \{1,2,3\},\ B = \{1,2,3,4\}$

x	1	2	3
y	4	2	1

	oui	non
application		
injection		
surjection		

$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{1,2,3,4\}$

x	1	2	3	4
y	3	4	1	2

	oui	non
application		
injection		
surjection		

$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{1,2,3,4\}$

x	1	2	3	4
y	1	3	2	4

	oui	non
application		
injection		
surjection		

$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{1,2,3\}$

x	1	2	3	4
y	3	2	1	1

	oui	non
application		
injection		
surjection		

$A = \{1,2,3\},\ B = \{1,2,3,4\}$

x	1	1	2	3
y	2	4	1	3

	oui	non
application		
injection		
surjection		

$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{1,2,3,4\}$

x	1	2	3	4
y		3	2	1

	oui	non
application		
injection		
surjection		

$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{1,3,4\}$

x	1	2	3	4
y	3	3	3	3

	oui	non
application		
injection		
surjection		

$A = \{1,2,4\},\ B = \{1,2,3,4\}$

x	1	2	4
y	1	2	4

	oui	non
application		
injection		
surjection		

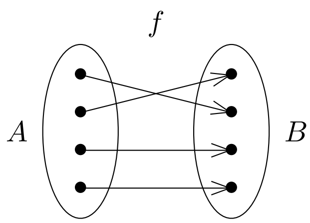
$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{1,2,3,4\}$

x	1	2	3	4
y	4	4	1	2

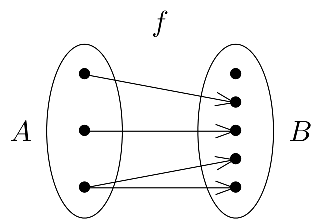
	oui	non
application		
injection		
surjection		

Exercice 22 Dans chacun des cas suivants indiquer dans le tableau si on a défini

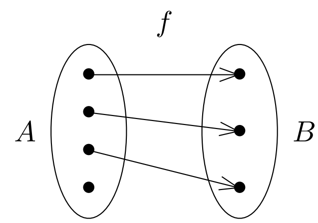
- une application de A dans B,
- une injection de A dans B,
- une surjection de A dans B.



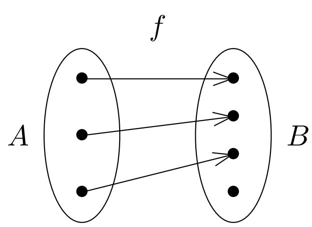
	oui	non
application		
injection		
surjection		



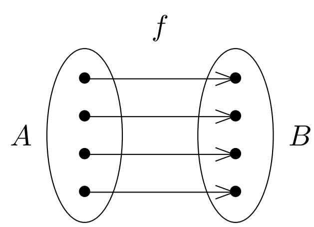
	oui	non
application		
injection		
surjection		



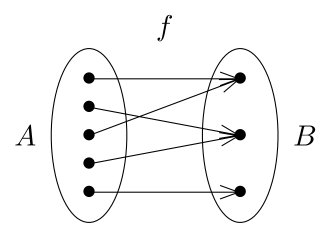
	oui	non
application		
injection		
surjection		



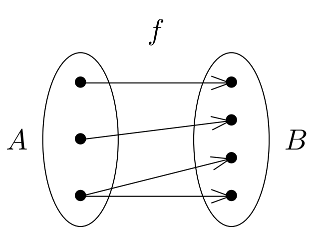
	oui	non
application		
injection		
surjection		



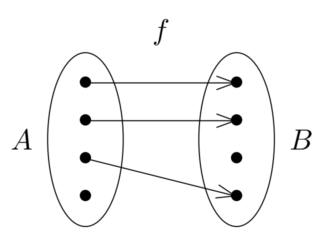
	oui	non
application		
injection		
surjection		



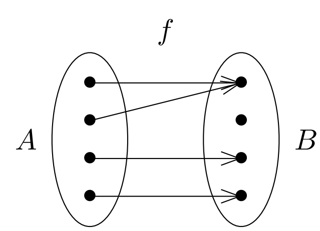
	oui	non
application		
injection		
surjection		



	oui	non
application		
injection		
surjection		



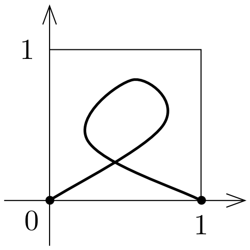
	oui	non
application		
injection		
surjection		



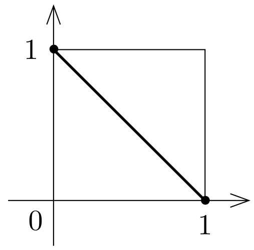
	oui	non
application		
injection		
surjection		

Exercice 23 Dans chacun des cas suivants indiquer dans le tableau si on a repésenté le graphe

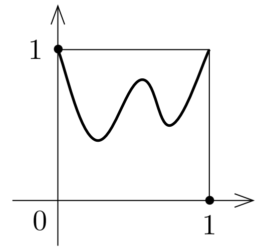
- d'une application de A dans B,
- d'une injection de $[0,1]$ dans $[0,1]$,
- d'une surjection de $[0,1]$ dans $[0,1]$.



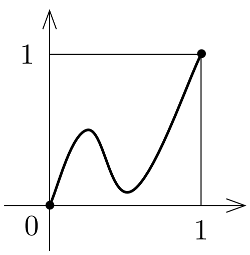
	oui	non
application		
injection		
surjection		



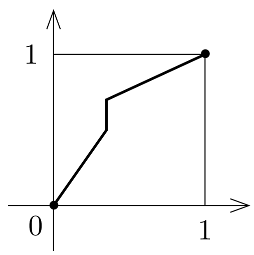
	oui	non
application		
injection		
surjection		



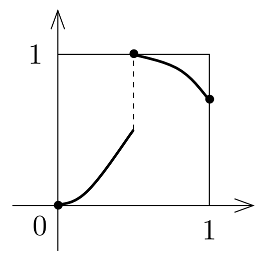
	oui	non
application		
injection		
surjection		



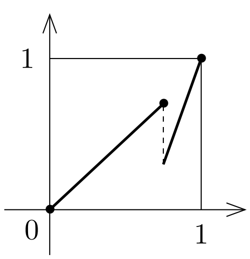
	oui	non
application		
injection		
surjection		



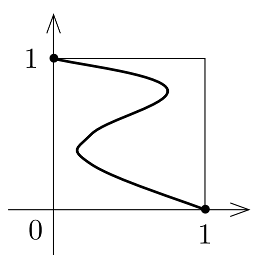
	oui	non
application		
injection		
surjection		



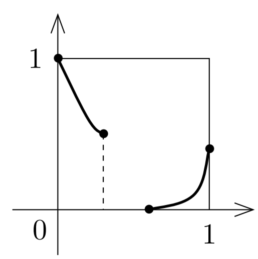
	oui	non
application		
injection		
surjection		



	oui	non
application		
injection		
surjection		



	oui	non
application		
injection		
surjection		



	oui	non
application		
injection		
surjection		

Bijections, bijections réciproques

Exercice 24 Pour chaque fonction numérique d'une variable réelle donnée par les formules ci-dessous, déterminez le domaine de définition et l'image, notez si vous estimez qu'elle est injective ou non. Lorsque la fonction est bijective, trouvez l'expression de la fonction réciproque et déterminez le domaine de définition et l'image de cette derni ?re. Puis tracez la fonction et sa réciproque dans un m ?me rep ?re :

$$(a)\quad \frac{2x}{3x-1}, \qquad (b)\quad \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$$

Exercice 25 Pour chacune des fonctions données par les formules et les domaines suivants, notez-si vous pensez qu'elle est bijective. Tracez le graphe de chaque fonction pour confirmer vos conclusions (ou autrement).

$$\begin{array}{llll}
(a) & x \mapsto \tan(x), \quad 0 < x < 1; & (b) & x \mapsto \exp(|x|), \quad -1 < x < 1; \\
(c) & x \mapsto \cosh(2x), x > 1; & (d) & x \mapsto x^2 + 6x + 9, x > 0; \\
(e) & x \mapsto x^2 - 6x + 9, x > 0; & (f) & x \mapsto \dfrac{1}{x-1}, x \neq 1; \\
(g) & x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}, x > 1; & (h) & x \mapsto \exp(x)\ln(x), x > 0.
\end{array}$$

Exercice 26 Trouver une formule pour l'inverse de la fonction f donnée par :

$$x \mapsto f(x) = 5 - 12x - 2x^2, \quad \text{si} \quad x > -3.$$

Esquisser le graphe de f et le graphe de son inverse sur un m ?me graphique.

Exercice 27 Simplifier les expressions suivantes autant que possible.

$$(a)\quad \cos(\arcsin(x)), \quad (b)\quad \sin(\arctan(x)).$$

Exercice 28 Trouvez des exemples numériques pour montrer qu'en général

$$\arctan(x) \neq \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}.$$

Exercice 29 En partant du graphe de sinh, cosh et tanh, trouver le graphe de leurs fonctions réciproques.

Exercice 30 Prouvez les formules

$$(a)\quad \operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad (b)\quad \operatorname{argth}(x) = \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right).$$

Applications des fonctions

Exercice 31 Dans la théorie des circuits électriques, il y a une fonction appelée la fonction de Heaviside, baptisé du nom du physicien Oliver Heaviside (1850-1925), définie comme suit :

$$H(t) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

elle représente l'entrée un circuit qui est alimenté au temps $t = 0$. Il s'agit d'une fonction définie par deux morceaux pour laquelle un symbole simple est employé.

Que représente la fonction $t \mapsto H(-t)$? Que représente $t \mapsto H(t-1)$? Quel est le graphique de $t \mapsto H(t) - H(t-1)$?

Vous pouvez employer ceci comme un point de départ pour une autre recherche sur des fonctions définies ayant des formules simples. Ces fonctions sont en fait employées en liaison avec des transformées de Laplace pour résoudre des équations différentielles liées aux circuits électriques.