Université de Rennes 1
MIPE 1 - A01- juin 2008
Contrôle long
(2 heures)

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (10 points)

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\lambda > 0$. Si $x \in \mathbf{R}$ et $0 < x$ on pose $x^\lambda = \exp(\lambda \ln(x))$. Cet exercice propose la démonstration d'un résultat connu sur la comparaison de x^λ et $\ln(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

1) Soit f la fonction qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $\exp(x) - x$.
a) Calculer f' et f''.
b) En utilisant le fait que $\exp(x) = (\exp(\frac{x}{2}))^2$ si $x \in \mathbf{R}$ montrer que f'' est positive.
c) En déduire que $0 \leq f'(x)$ si $0 \leq x$.
d) En déduire que $x \leq \exp(x)$ si $0 \leq x$ et que $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

2) a) Rappeler quelle est la limite $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)$.
b) Montrer que la fonction qui à $x \in]0, +\infty)$ associe $\ln(x)$ est croissante.
c) Soit $A \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $B \in]0, +\infty)$ tel que $A \leq \ln(x)$ si $x \in [B, +\infty)$.

3) a) Montrer que la fonction qui à $x \in]0, +\infty)$ associe x^λ est croissante.
b) Soit $A \in]0, +\infty)$. Montrer qu'il existe $C \in]0, +\infty)$ tel que $A \leq x^\lambda$ si $x \in [C, +\infty)$.
c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} x^\lambda = +\infty$ et en déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\lambda}$.

4) Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x^\lambda} \text{ si } x \in]0, +\infty).$$

a) Justifier que g est une fonction dérivable.
b) Étudier le signe de la dérivée de g.
c) En déduire que

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x^\lambda} \leq \frac{1}{\lambda e} \text{ si } x \in [e^{\frac{1}{\lambda}}, +\infty).$$

5) a) Montrer que

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x^{2\lambda}} \leq \frac{1}{\lambda e x^\lambda} \text{ si } x \in [e^{\frac{1}{\lambda}}, +\infty).$$

b) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{2\lambda}} = 0$.

6) a) Montrer que si $x \in]0,+\infty)$ alors

$$\frac{\ln(x)}{x^{\lambda}} = 2\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{(x^{\frac{1}{2}})^{2\lambda}}.$$

b) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\lambda}} = 0$.

Exercice 2 (3 points)

1) Déterminer les racines complexes de l'équation

$$z^2 - 6z + 10 = 0 \tag{1}$$

2) Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$y'' - 6y' + 10y = 0 \tag{2}$$

3) Trouver la solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' - 6y' + 10y = 20t - 2 \tag{3}$$

qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 3 (2 points)

1) Calculer en justifiant la limite $\lim_{x\to+\infty} x^3 \frac{\cos(x)+\ln(x)}{\exp(\frac{1}{3}x+1)}$.

2) Calculer en justifiant la limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + \cos(x)\times x^{\frac{1}{3}}}$.

Exercice 4 (5 points)

1) Calculer les intégrales $\int_0^2 \sqrt{8-2x^2}dx$ et $\int_{-3}^3 \sqrt{18+2x^2}dx$.

2) Calculer les intégrales $\int_0^{\pi} \left(\sin(x)^3 + 2\sin(x)^2 + 3\sin(x)\right) dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\sin(x)^2}}dx$.