Université de Rennes 1
MIPE 1 - A01- décembre 2007
Contrôle long - 1 heure

Le sujet sert de feuille de composition. Un barème sur 20 est précisé.
Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (10 points)

Cet exercice propose la démonstration d'un résultat connu sur la comparaison de x et e^x en $+\infty$.

1) Montrer que $e^x \geq 1$ si $x \in [0, +\infty)$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = e^x - x$ si $x \in \mathbf{R}$. Justifier que g est une fonction dérivable, étudier le signe de la dérivée de g et en déduire que

$$e^x \geq x \text{ si } x \in [0, +\infty).$$

3) En déduire les valeurs de $\lim_{x\to+\infty} e^x$, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}}$.
On considère la fonction f dérivable définie sur $[0, +\infty)$ par

$$f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}.$$

4) Étudier le signe de la dérivée de f.

5) En déduire que si $x \in [0, +\infty)$ alors

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2}{e}$$

et

$$0 \leq xe^{-x} \leq \left(\frac{2}{e}\right) e^{-\frac{x}{2}}.$$

6) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Exercice 2 (5 points)

1) Déterminer les racines complexes de l'équation

$$z^2 - 6z + 13 = 0 \tag{1}$$

2) Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$y'' - 6y' + 13y = 0 \tag{2}$$

3) Trouver la solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' - 6y' + 13y = 13t + 7 \tag{3}$$

qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 3 (5 points)

1) Calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \dfrac{\sin(x)+1}{\exp(\frac{1}{3}x+1)}$.

2) Calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln(x)+\cos(x)}$.