

Licence de Mathématiques, Géométrie Affine

TD 9 : Coniques affines

1 Soit $p = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2$ et $q = (x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2$ deux polynômes et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Etudier l'ensemble des $x \in \mathbf{K}^2$ pour lesquels il existe $u \in \mathbf{K}$ tels que $u^2 = p(x)$ et $(1 - \lambda u)^2 = q(x)$.

2 Soit $p = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2$ et $q = (x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2$ deux polynômes et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Etudier l'ensemble des $x \in \mathbf{K}^2$ pour lesquels $p(x) = \lambda q(x)$.

3 Soit $p = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2$ et $l = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma$.
Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Etudier l'ensemble des $x \in \mathbf{K}^2$ pour lesquels $p(x) = \lambda l^2(x)$.

4 Soit p un polynôme à deux variables et de degré au plus 2. Etudier l'ensemble des automorphismes affines \mathcal{A} tels que $\mathcal{A}(\{p = 0\}) = \{p = 0\}$.

5 Donner une paramétrisation rationnelle de l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbf{Q}^2 : xy = 1\}$.

6 Donner une paramétrisation rationnelle de l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbf{Q}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

7 Soit le cône $C = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ et le plan $H_{\lambda, \mu} = \{(z - 1) + \lambda x + \mu y = 0\}$ de \mathbf{R}^3 . On dit que (λ, μ) est équivalent à (λ', μ') si et seulement s'il existe un isomorphisme affine de $H_{\lambda, \mu}$ dans $H_{\lambda', \mu'}$ qui envoie $C \cap H_{\lambda, \mu}$ sur $C \cap H_{\lambda', \mu'}$ de façon bijective. Montrer qu'on a défini une relation d'équivalence et étudier les classes d'équivalence.

8 a. Montrer que $\{p = q = 0\} \subset \{\lambda p + (1 - \lambda)q = 0\}$ si $p, q \in \mathbf{R}[x, y, z]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

b. Soit $A = \{(x, y, z) : x + y = 0, 2x^2 + z^2 = 1\}$ et $B = \{(x, y, z) : x + y = 0, 2x^2 + z^2 = 1\}$. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 1$ s'annule sur A et B .

c. Montrer que $(1 + \lambda)x^2 + (1 - \lambda)y^2 + z^2 - 1$ s'annule sur A et B .

d. Quels sont les polynômes de degré 2 qui s'annulent sur A et B ?

e. Soit $C = \{(x, y, z) : z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$. Quels sont les polynômes de degré 2 qui s'annulent sur A, B et C ?