Un calcul d'angle

Jean-Marie Lion
Université de Rennes 1

Voici un exercice que m'a communiqué Antoine Chambert-Loir et qui est le prototype d'exercice faussement facile. Nous en donnons une solution. Les références indiquées à la fin du texte en proposent plusieurs autres.

Énoncé *Soit* (A, B, C, D) *un quadrilatère convexe du plan affine euclidien tel que* $\widehat{BAD} = \widehat{CBA} = 80°$, $\widehat{BAC} = 60°$ *et* $\widehat{DBA} = 50$. *Trouver* $\widehat{DCA}$.

Nous allons montrer que l'angle $\widehat{DCA}$ vaut $30°$ en rappelant au préalable quelques résultats. Ensuite nous donnerons un exercice détaillé dont l'objet est de prouver ce résultat avec une seconde méthode.

Formules trigonométriques On a

$$\sin(30) = \frac{1}{2} \text{ et } \sin(\alpha)\sin(90-\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha).$$

Propriétés des triangles 1 - Dans un triangle non dégénéré de côtés a, b, c et d'angles correspondants α, β et γ on a $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ et

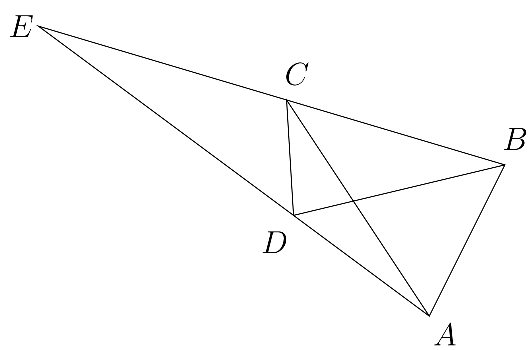
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}.$$

2 - Soit deux triangles non dégénérés (X, Y, Z) et (U, V, W). Si $\widehat{XYZ} = \widehat{UVW}$ et $\dfrac{YX}{YZ} = \dfrac{VU}{VW}$ alors $\widehat{YZX} = \widehat{VWU}$ et $\widehat{ZXY} = \widehat{WUV}$.

Démonstration de l'égalité $\widehat{DCA} = 30°$**.**

Puisque (A, B, C, D) est convexe on a $\widehat{CBD} + \widehat{DBA} = \widehat{CBA}$ donc $\widehat{CBD} = 30°$. De même on a $\widehat{BAC} + \widehat{CAD} = \widehat{BAD}$ donc $\widehat{CAD} = 20°$.

Puisque $\widehat{BAD} + \widehat{CBA} \neq 180°$ les droites (AD) et (BC) sont concourantes en un point E.



Puisque
$$\widehat{BAE} = \widehat{BAD} = \widehat{EBA} = \widehat{CBA} = 80°$$
le triangle (A, B, E) est isocèle en E et puisque la somme des trois angles d'un triangle vaut 180° il vient que $\widehat{AEB} = 20°$.

Les angles du triangle (B, E, D) sont donc $\widehat{EBD} = \widehat{CBD} = 30°$, $\widehat{DEB} = \widehat{AEB} = 20°$ et, puisque la somme des trois angles d'un triangle vaut 180°, $\widehat{BDE} = 130°$. On a donc
$$\frac{ED}{EB} = \frac{\sin(30)}{\sin(130)} = \frac{\sin(30)}{\sin(50)}.$$

Les angles du triangle (A, B, C) sont $\widehat{BAC} = 60°$, $\widehat{CBA} = 80°$ et, puisque la somme des trois angles d'un triangle vaut 180°, $\widehat{ACB} = 40°$.

Puisque la somme des trois angles d'un triangle vaut 180° on déduit de $\widehat{DAB} = 80°$ et $\widehat{ABD} = 50°$ que $\widehat{BDA} = 50°$. Le triangle (A, B, D) est donc isocèle en A et $AD = AB$.

On a donc
$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin(40)}{\sin(80)}.$$

D'après les formules trigonométriques annoncées, puisque $40 + 50 = 90$ et que $2 \times 40 = 80$ on a
$$\sin(40)\sin(50) = \frac{1}{2}\sin(80).$$

Puisque $\sin(30) = \frac{1}{2}$ il vient
$$\sin(40)\sin(50) = \sin(30)\sin(80)$$
et donc
$$\frac{ED}{EB} = \frac{\sin(30)}{\sin(50)} = \frac{\sin(40)}{\sin(80)} = \frac{AD}{AB}.$$

Or on a $\widehat{CAD} = 20° = \widehat{DEB}$. Par conséquent les angles $\widehat{DCA}$ et $\widehat{DBE}$ sont égaux. Ainsi $\widehat{DCA} = \widehat{DBE} = 30°$.

Un exercice détaillé Soit (A, B, E) un triangle tel que $\widehat{BAE} = \widehat{EBA} = 80°$. On considère sur le segment $[A, E]$ le point D tel que $\widehat{DBA} = 50°$ et sur le segment $[B, E]$ le point C tel que $\widehat{BAC} = 60°$.

1 - Montrer que (A, B, E) est isocèle en E et que $\widehat{AEB} = 20°$.

2 - Soit F le point du segment $[A, E]$ tel que $\widehat{FBA} = 60°$ et soit G l'intersection des droites (AC) et (BF). Montrer que (A, B, G) est équilatéral.

3 - Montrer que (A, B, D) est isocèle en A et en déduire que $AB = AD$.

4 - Déduire de 2 et 3 que $AG = AD$ et que (A, G, D) est isocèle en A.

5 - En déduire que $\widehat{DGA} = 80°$ et que $\widehat{CGD} = 100°$.

6 - Montrer que la réflexion d'axe (EG) envoie B et C sur A et F.

7 - En utilisant 1 et 6 montrer que $\widehat{DFC} = 100°$.

8 - Déduire de 2 que $\widehat{GCF} = 60°$.

9 - Déduire de 6 et 8 que le triangle (G, C, F) est équilatéral.

10 - Déduire de 5, 7 et 9 que $\widehat{DCA} = \widehat{DCG} = \widehat{FCD} = 30°$.

11 - Faire une figure illustrant l'exercice.

Références

B. Sénéchal Géométrie classique et mathématiques modernes

C. Knop Neufs solutions à un problème (en russe)
(http ://kvant.mirror1.mccme.ru/1993/06/istoriya_s_geometriej.htm)

Cut the Knot The 80-80-20 triangle
(http ://www.cut-the-knot.org)

Les Mathématiques.net Un problème d'angle
(http ://les-mathematiques.u-strasbg.fr/)

Questions réponses de Yahoo ! Vous saurez quand même bien résoudre un vulgaire problème de triangle isocèle niveau 5è, non ?
http ://fr.answers.yahoo.com/

Tom Rike An Intriguing Geometry Problem
(http ://mathcircle.berkeley.edu/BMC4/Handouts/geoprob.pdf)