Thalès et Pappus

Jean-Marie Lion
Université de Rennes 1

On aborde ici des questions relatives à Thalès et à Pappus d'un point de vue géométrique puis on résoud les mêmes questions avec une approche vectorielle.

Thalès

mesure algébrique et rapport de mesures algébriques Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Soit $\overrightarrow{v}$ est un vecteur non nul de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et δ une droite affine dirigé par $\overrightarrow{v}$. Si A et B sont deux points de δ, la mesure algébrique $\overline{AB}^{\overrightarrow{v}}$ (associée à $\overrightarrow{v}$) est le scalaire λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}^{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{v}.$$

En fait la mesure algbérique $\overline{AB}^{\overrightarrow{v}}$ ne dépend pas de δ et elle est définie dès que $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$ c'est à dire dès que A et B appartiennent à une droite δ' parallèle à δ.

Soit A, B, C et D quatre points tels que A et B appartiennent à une droite δ dirigée par $\overrightarrow{v}$ et C et D sont distincts et appartiennent à une droite δ' aussi dirigée par $\overrightarrow{v}$. Alors $\overline{CD}^{\overrightarrow{v}}$ est non nul et le rapport $\dfrac{\overline{AB}^{\overrightarrow{v}}}{\overline{CD}^{\overrightarrow{v}}}$ ne dépend pas du choix de $\overrightarrow{v}$. En effet si $\overrightarrow{w}$ est un second vecteur directeur de δ et δ' alors il existe un scalaire non nul α tel que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{v}$. Ainsi on a

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}^{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{v} = \overline{AB}^{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{w}$$

et

$$\overrightarrow{CD} = \overline{CD}^{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{v} = \overline{CD}^{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{w}.$$

Par conséquent

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\overline{AB}^{\overrightarrow{v}}}{\overline{CD}^{\overrightarrow{v}}}\overrightarrow{CD} = \frac{\overline{AB}^{\overrightarrow{w}}}{\overline{CD}^{\overrightarrow{w}}}\overrightarrow{CD}$$

et

$$\frac{\overline{AB}^{\vec{v}}}{\overline{CD}^{\vec{v}}} = \frac{\overline{AB}^{\vec{w}}}{\overline{CD}^{\vec{w}}}.$$

Finalement puisque le rapport $\dfrac{\overline{AB}^{\vec{v}}}{\overline{CD}^{\vec{v}}}$ ne dépend du choix de $\vec{v}$ on le note $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ et on l'appelle rapport de mesures algébriques. On a

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}\overrightarrow{CD}.$$

Si de plus $A \neq B$ alors

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{1}{\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}}.$$

Montrons maintenant

énoncé *Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes en A, d et d' deux droites parallèles coupant respectivement D_i en A_i et $A_{i'}$ distincts de A. Alors*

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA'_1}} = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA'_2}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A'_1A'_2}}.$$

preuve Soit h l'homothétie de centre A qui envoie A_1 sur A'_1. On note k le rapport de cette homothétie.

Puisque A_1 et A'_1 sont alignés avec A en étant différents de A l'homothétie h est bien définie et son rapport k est non nul. C'est donc un automorphisme affine, en particulier une bijection.

Puisque $A \in D_2$ on a $h(D_2) = D_2$ (une homothétie non constante laisse globalement invariante toute droite qui passe par son centre)

Puisque une homothétie non constante envoie toute droite sur une droite qui lui est parallèle, l'image $h(d)$ de la droite d est la droite parallèle à d qui passe par $h(A_1) = A'_1$: c'est la droite d'.

Or $\{A_2\} = D_2 \cap d$. Par conséquent

$$h(\{A_2\}) = h(D_2 \cap d) \subset h(D_2) \cap h(d) = D_2 \cap d' = \{A'_2\}$$

et donc $h(A_2) = A'_2$.

Puisque que k est le rapport de l'homothétie h on a pour tous les M, N dans $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{h(M)h(N)} = k\overrightarrow{MN}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'_1} &= \overrightarrow{h(A)h(A_1)} = k\overrightarrow{AA_1}\\ \overrightarrow{AA'_2} &= \overrightarrow{h(A)h(A_2)} = k\overrightarrow{AA_2}\\ \overrightarrow{A'_1A'_2} &= \overrightarrow{h(A_1)h(A_2)} = k\overrightarrow{A_1A_2}.\end{aligned}$$

Ceci donne

$$\frac{\overline{AA'_1}}{\overrightarrow{AA_1}} = \frac{\overline{AA'_2}}{\overrightarrow{AA_2}} = \frac{\overline{A'_1A'_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}} = k$$

ou

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overrightarrow{AA'_1}} = \frac{\overline{AA_2}}{\overrightarrow{AA'_2}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overrightarrow{A'_1A'_2}} = \frac{1}{k}.$$

Pappus

énoncé 1 *(Pappus, parallèles et translations) Soient δ et δ' deux droites parallèles et distinctes d'un plan affine $\mathcal{P}$ et soient A, B et C sur δ et A', B' et C' sur δ'. On suppose que (AB') et (BA') sont parallèles et que (BC') et (CB') le sont aussi. Alors (AC') et (CA') sont parallèles.*

preuve Observons que puisque δ et δ' sont deux droites parallèles et distinctes, leur intersection est vide. Ainsi les droites (AB'), (BA'), (BC'), (CB'), (AC') et (CA') sont bien définies.

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de δ. C'est aussi un vecteur directeur de δ' car les deux droites sont parallèles. On note t_A^B la translation qui envoie A sur B, t_B^C celle qui envoie B sur C et t_A^C celle qui envoie A sur C. Ce sont des translations selon les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont colinéaires au vecteur $\overrightarrow{v}$ qui dirige δ et δ'. Par conséquent chacune des droites δ et δ' est globalement invariante par ces trois translations.

Utilisons maintenant le fait que l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.

L'image $t_A^B(AB')$ est la droite parallèle à (AB') et qui passe par $B = t_A^B(A)$: c'est la droite (BA'). Puisque $\{B'\} = (AB') \cap \delta'$ on a

$$t_A^B(\{B'\}) = t_A^B((AB') \cap \delta') \subset t_A^B(AB') \cap t_A^B(\delta') = (BA') \cap \delta' = \{A'\}$$

et donc $t_A^B(B') = A'$.

L'image $t_B^C(BC')$ est la droite parallèle à (BC') et qui passe par $C = t_B^C(B)$: c'est la droite (CB'). Puisque $\{C'\} = (BC') \cap \delta'$ on a

$$t_B^C(\{C'\}) = t_B^C((BC') \cap \delta') \subset t_B^C(BC') \cap t_B^C(\delta') = (CB') \cap \delta' = \{B'\}$$

et donc $t_B^C(C') = B'$.

Or la composée de deux translations est une translation et la restriction de la composition aux translations est commutative : $t \circ t' = t' \circ t$ est une translation si t et t' sont des translations. Ainsi on a $t_A^C = t_B^C \circ t_A^B = t_A^B \circ t_B^C$. Par conséquent

$$t_A^C(A) = t_B^C(t_A^B(A)) = t_B^C(B) = C$$

et

$$t_A^C(C') = t_A^B(t_B^C(C')) = t_A^B(B') = A'.$$

Par conséquent l'image de la droite (AC') par la translation t_A^C est la droite (CA'). Puisque l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle on en déduit que (AC') et (CA') sont parallèles.

énoncé 2 *(Pappus, parallèles et homothéties) Soient δ et δ' deux droites concourantes en O et distinctes d'un plan affine $\mathcal{P}$ et soient A, B et C sur $\delta \setminus \{O\}$ et A', B' et C' sur $\delta' \setminus \{O\}$. On suppose que (AB') et (BA') sont parallèles et que (BC') et (CB') le sont aussi. Alors (AC') et (CA') sont parallèles.*

preuve Puisque $A, B, C \in \delta \setminus \{O\}$ et $A', B', C' \in \setminus\{O\}$ les droites (AB'), (BA'), (BC'), (CB'), (AC') et (CA') sont bien définies.

On note h_A^B la homothétie de centre O qui envoie A sur B, h_B^C celle qui envoie B sur C et h_A^C celle qui envoie A sur C. Ces homothéties sont bien définies et se sont des automorphismes affines car $A, B, C \in \delta \setminus \{O\}$. De plus, puisque leur centre commun est O, chacune des droites δ et δ' est globalement invariante par ces trois homothéties.

Utilisons maintenant le fait que l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

L'image $h_A^B(AB')$ est la droite parallèle à (AB') et qui passe par $B = h_A^B(A)$: c'est la droite (BA'). Puisque $\{B'\} = (AB') \cap \delta'$ on a

$$h_A^B(\{B'\}) = h_A^B((AB') \cap \delta') \subset h_A^B(AB') \cap h_A^B(\delta') = (BA') \cap \delta' = \{A'\}$$

et donc $h_A^B(B') = A'$.

L'image $h_B^C(BC')$ est la droite parallèle à (BC') et qui passe par $C = h_B^C(B)$: c'est la droite (CB'). Puisque $\{C'\} = (BC') \cap \delta'$ on a

$$h_B^C(\{C'\}) = h_B^C((BC') \cap \delta') \subset h_B^C(BC') \cap h_B^C(\delta') = (CB') \cap \delta' = \{B'\}$$

et donc $h_B^C(C') = B'$.

Or la composée de deux homothéties de même centre O est une homothétie de centre O et la restriction de la composition aux homothéties de centre O est commutative : $h \circ h' = h' \circ h$ est une homothétie de centre O si h et h' sont des homothéties de centre O. Ainsi on a $h_A^C = h_B^C \circ h_A^B = h_A^B \circ h_B^C$. Par conséquent

$$h_A^C(A) = h_B^C(h_A^B(A)) = h_B^C(B) = C$$

et

$$h_A^C(C') = h_A^B(h_B^C(C')) = h_A^B(B') = A'.$$

Par conséquent l'image de la droite (AC') par l'homothétie h_A^C est la droite (CA'). Puisque l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle on en déduit que (AC') et (CA') sont parallèles.

preuves des mêmes résultats par l'algèbre linéaire

preuve de Thalès Puisque $A_i, A_i' \in D_i \setminus \{A\}$ il existe λ_i non nul tel que $\overrightarrow{AA_i} = \lambda_i \overrightarrow{AA_i'}$. On a aussi $\overrightarrow{A_iA} = \lambda_i \overrightarrow{A_i'A}$. On note A_2'' le point tel que $\overrightarrow{AA_2''} = \lambda_1 \overrightarrow{AA_2'}$. On a $A_2'' \in D_2 \setminus \{A\}$. On a aussi

$$\overrightarrow{A_1A_2''} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AA_2''} = \lambda_1(\overrightarrow{A_1'A} + \overrightarrow{AA_2'}) = \lambda_1 \overrightarrow{A_1'A_2'}.$$

Par conséquent les droites (A_1A_2'') et $(A_1'A_2')$ sont parallèles et $A_2'' \in \delta$. Finalement $A_2'' \in \delta \cap D_2$ donc $A_2'' = A_2$. On a donc

$$\lambda_1 \overrightarrow{AA_2'} = \overrightarrow{AA_2} = \lambda_2 \overrightarrow{AA_2'}.$$

Puisque $A \neq A_2'$ ceci implique $\lambda_1 = \lambda_2$.

Finalement

$$\begin{aligned} \lambda_1 \overrightarrow{AA_1'} &= \overrightarrow{AA_1} \\ \lambda_1 \overrightarrow{AA_2'} &= \overrightarrow{AA_2} \\ \lambda_1 \overrightarrow{A_1'A_2'} &= \overrightarrow{A_1A_2}. \end{aligned}$$

En passant aux rapports de mesures algébriques on obtient

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_1'}} = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_2'}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1'A_2'}} = \lambda_1.$$

preuve de Pappus 1 On note A'' le point tel que $\overrightarrow{BA''} = \overrightarrow{AB'}$. On a $\overrightarrow{A''B} = \overrightarrow{B'A}$ et donc

$$\overrightarrow{B'A''} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA''} = \overrightarrow{A''B} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA''} = \overrightarrow{AB}.$$

Ainsi le point A'' est sur la droite qui passe par B et qui est parallèle à (AB') car $\overrightarrow{BA''} = \overrightarrow{AB'}$: c'est la droite (BA'). Il est aussi sur la droite parallèle à δ et qui passe par B' car $\overrightarrow{B'A''} = \overrightarrow{AB}$: c'est la droite δ'. Ainsi $A'' = A'$ et $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BA'}$.

On note B'' le point tel que $\overrightarrow{CB''} = \overrightarrow{BC'}$. On a $\overrightarrow{B''C} = \overrightarrow{C'B}$ et donc

$$\overrightarrow{C'B''} = \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB''} = \overrightarrow{B''C} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB''} = \overrightarrow{BC}.$$

Ainsi le point B'' est sur la droite qui passe par C et qui est parallèle à (BC') car $\overrightarrow{CB''} = \overrightarrow{BC'}$: c'est la droite (CB'). Il est aussi sur la droite parallèle à δ et qui passe par C' car $\overrightarrow{C'B''} = \overrightarrow{BC}$: c'est la droite δ'. Ainsi $B'' = B'$ et $\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CB}$.

On a finalement

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{CA'}.$$

Ceci prouve que les droites (AC') et (CA') sont parallèles.

preuve de Pappus 2 Puisque A, B et C sont sur $\delta \setminus \{O\}$ il existe β et γ non nuls tels que que $\overrightarrow{OB} = \beta\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC} = \gamma\overrightarrow{OB}$. Ceci implique que $\overrightarrow{OC} = \gamma(\beta\overrightarrow{OA}) = (\beta\gamma)\overrightarrow{OA}$. On a aussi $\overrightarrow{BO} = \beta\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{CO} = \gamma\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{CO} = (\beta\gamma)\overrightarrow{AO}$.

On note A'' le point tel que $\overrightarrow{OA''} = \beta\overrightarrow{OB'}$. Le point A'' est donc sur δ'. On a

$$\overrightarrow{BA''} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA''} = \beta\overrightarrow{AO} + \beta\overrightarrow{OB'} = \beta(\overrightarrow{AO} + \beta\overrightarrow{OB'}) = \beta\overrightarrow{AB'}$$

et donc les droites (AB') et (BA'') sont parallèles. Or la droite qui passe par B et qui est parallèle à (AB') est la droite (BA'). Donc $A'' \in (BA')$. Ainsi $A'' \in \delta' \cap (BA')$ donc $A'' = A'$ et $\overrightarrow{OA'} = \beta\overrightarrow{OB'}$.

On note B'' le point tel que $\overrightarrow{OB''} = \gamma\overrightarrow{OC'}$. Le point B'' est donc sur δ'. On a

$$\overrightarrow{CB''} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB''} = \gamma\overrightarrow{BO} + \gamma\overrightarrow{OC'} = \gamma(\overrightarrow{BO} + \gamma\overrightarrow{OC'}) = \gamma\overrightarrow{BC'}$$

et donc les droites (BC') et (CB'') sont parallèles. Or la droite qui passe par C et qui est parallèle à (BC') est la droite (CB'). Donc $B'' \in (CB')$. Ainsi $B'' \in \delta' \cap (BA')$ donc $B'' = B'$ et $\overrightarrow{OB'} = \gamma\overrightarrow{OC'}$.

Puisque et $\overrightarrow{OA'} = \beta\overrightarrow{OB'}$ et que $\overrightarrow{OB'} = \gamma\overrightarrow{OC'}$ on a $\overrightarrow{OA'} = \beta(\gamma)\overrightarrow{OC'}) = (\beta\gamma)\overrightarrow{OC'}$. Or on a aussi $\overrightarrow{CO} = (\beta\gamma)\overrightarrow{AO}$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA'} &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA'} \\
&= (\beta\gamma)\overrightarrow{AO} + (\beta\gamma)\overrightarrow{OC'} \\
&= (\beta\gamma)(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC'}) \\
&= (\beta\gamma)\overrightarrow{AC'}.
\end{aligned}$$

Ainsi les droites (AC') et (CA') ont des vecteurs directeurs colinéaires. Elles sont donc parallèles.