Première année du Master
Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation
mention second degré - parcours mathématiques
Université de Rennes 1

La suite logistique

Jean-Marie Lion

`Version du 31 décembre 2014`

Source : "La suite logistique et le chaos", Daniel Perrin
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/logistiqueDP.pdf`

Les exercices sont liés.

Exercice 1.
Soient $a < l < b$ trois réels et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans $]a,b[$ telle que $|v_{n+1} - l| > |v_n - l|$ si $n \in \mathbf{N}$.
1. Montrer que de telles suites existent.
2. Montrer que l ne peut pas être la limite de $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 2.
Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 4x(1-x)$.
1. Etudier f puis en déduire que $f([0,1]) = [0,1]$ et que si $y \in [0,1]$ alors $f^{-1}(y)$ a au plus 2 éléments.
2. Soit $y \in [0,1]$. On considère la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de sous-ensembles de $[0,1]$ définie par récurrence de la façon suivante : $X_0 = \{y\}$ et si $n \in \mathbf{N}$ alors $X_{n+1} = f^{-1}(X_n)$. Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ alors X_n est un ensemble fini qui possède au plus 2^n éléments et en déduire que $X = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} X_n$ est au plus dénombrable.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
4. Vérifier que si $x \in [0,1]$ alors

$$f(x) - \frac{3}{4} = 4\left(\frac{3}{4} - x\right)\left(x - \frac{1}{4}\right).$$

5. Montrer que si $x \in]1/2,1]$ et $x \neq 3/4$ alors

$$\left|f(x) - \frac{3}{4}\right| > \left|x - \frac{3}{4}\right|.$$

6. Montrer que si $x \in]0,1/2]$ alors

$$|f(x)| > |x|.$$

Exercice 3.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par récurrence sur n par $u_0 \in [0,1]$ et si $n \in \mathbf{N}$ alors $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$.
1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans $[0,1]$.
2. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite alors cette limite est 0 ou $3/4$.
3. Montrer qu'il existe un sous-ensemble au plus dénombrable Z de $[0,1]$ tel que si $u_0 \notin Z$ alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \neq 0$ et $u_n \neq 3/4$.
On suppose maintenant que $u_0 \notin Z$.
4. On suppose qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier n supérieur ou égal à N on a $u_n \in]1/2,1]$. Montrer que $|u_n - 3/4|$ est strictement croissante et en déduire que $3/4$ n'est pas la limite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
5. On suppose qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier n supérieur ou égal à N on a $u_n \in [0,1/2]$. Montrer que $|u_n|$ est strictement croissante et en déduire que 0 n'est pas la limite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

6. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite.

Exercice 4.
Soit $t \in [0,1]$. On définit par récurrence deux suites $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$:
- $d_0 = t_0 =$ partie entière de t;
- si $n \in \mathbf{N}$ alors $d_{n+1} =$ partie entière de $\left(2^{n+1}(t-t_n)\right)$ et $t_{n+1} = t_n + \dfrac{d_{n+1}}{2^{n+1}}$.

1. Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et que $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans $\{0,1\}$.
2. Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ alors $0 \le t - t_n < \dfrac{1}{2^n}$ et en déduire que la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers t.
3. Montrer que si $N \in \mathbf{N}$ alors $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N}$.
4. Montrer que si $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante à partir d'un certain rang $N+1$ alors pour tout entier $n \ge N+1$ on a $d_n = 0$.
5. Montrer que $t \in \mathbf{Q}$ si et seulement s'il existe $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tels que pour tout $n \ge p$ on a $d_{n+q} = d_n$.
6. Montrer que l'application Φ qui à $t \in [0,1]$ associe $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une injection de $[0,1]$ dans $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$.
7. Montrer que $\Phi([0,1])$ est l'ensemble D formé de la suite dont le premier terme et 1 et les autres sont tous nuls et des suites $d = (d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $\{0,1\}$ dont le premier terme est 0 et qui prennent une infinité de fois la valeur 0.
8. On définit sur D la relation $\le$ suivante : $d \le d'$ si $d = d'$ ou s'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $d_N < d'_N$ et pour tout entier naturel $n < N$ on a $d_n = d'_n$. Montrer que la relation $\le$ est une relation d'ordre total.
9. Soit $(d_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D$ et soit $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $t_0 = d_0$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, $t_{n+1} = t_n + \dfrac{d_{n+1}}{2^{n+1}}$. Vérifiez que $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante qui tend vers un réel t de $[0,1]$.
10. Montrer que l'application Ψ qui à $d = (d_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D$ associe la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{2^n}$ est bien définie et que c'est une bijection strictement croissante de D dans $[0,1]$ qui vérifie $\Phi \circ \Psi = Id_D$ et $\Psi \circ \Phi = Id_{[0,1]}$.

Exercice 5.
Soient $t \in [0,1]$ et $d = (d_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D$ tels que $t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{2^n}$ (voir exercice précédent). On considère la suite $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par récurrence de la façon suivante :
- $r_0 = t$;
- si $n \in \mathbf{N}$ alors $r_{n+1} = 2r_n -$ partie entière de $(2r_n)$.

1. Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ alors $r_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_{n+1+k}}{2^k}$.
2. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est périodique (c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tels que si $n \in \mathbf{N}$ est supérieur ou égal à p alors $r_{n+q} = r_n$) si et seulement si t est rationnel.
3. Soit $m \in \mathbf{N}^*$ et soit $(e_1,...,e_m) \in \{0,1\}^m$. On pose $y = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{e_n}{2^n}$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \{1,...,m\}$ on a $d_{p+n} = e_n$. Montrer que $0 \le r_p - y < \dfrac{1}{2^m}$.
4. Soit $e = (e_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D$ avec $e_0 = 0$ et $y = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e_n}{2^n}$. On suppose qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ on a si $n \in \{1,...,k\}$ alors $d_{p_k+n} = e_n$. Montrer que la suite $(r_{p_k})_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers y.

Exercice 6.
Si $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $E_n = \{0,1\}^n$. On pose aussi $E = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$.
1. Montrer que si $n \in \mathbf{N}^*$ alors $\mathrm{Card}(E_n) = 2^n$.

2. Si $e=(e_1,...,e_n)\in E_n$ et $e'=(e'_1,...,e'_{n'})\in E_{n'}$ on dit que $e\leq e'$ si (n,e) vient avant (n',e') pour l'ordre lexicographique. Montrer que la relation $\leq$ ainsi définie sur E est une relation d'ordre total.
3. Soit $e\in E$ et $n\in\mathbf{N}^*$ tel que $e\in E_n$. Soit $\alpha_n(e)$ le rang de e dans E_n et $\alpha(e)$ le rang de e dans E :

$$\alpha_n(e)=\mathrm{Card}(\{e'\in E_n, e'\leq e\}),\ \ \alpha(e)=\mathrm{Card}(\{e'\in E, e'\leq e\}).$$

Montrer que $\alpha_n(e)\leq 2^n$ et que

$$\alpha(e)=\sum_{k=1}^{n-1}2^k+\alpha_n(e).$$

4. Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ α_n est une bijection croissante de E_n dans $\{1,...,2^n\}$ et que α est une bijection croissante de E dans $\mathbf{N}$.
On note $\mathcal{E}:\mathbf{N}\to E$ la réciproque de α.
5. Soit $k\in\mathbf{N}^*$.
5.a. Montrer qu'il existe un unique triplet $(n(k),m(k),l(k))\in(\mathbf{N}^*)^3$ tel que

$$k=\sum_{i=0}^{n(k)-1}i2^i+n(k)\cdot(m(k)-1)+l(k) \text{ avec } m(k)\leq 2^{n(k)} \text{ et } l(k)\leq n(k).$$

5.b. On pose $A(k)=\sum_{i=0}^{n(k)-1}2^i+m(k)$. Vérifier que $\mathcal{E}(A(k))\in E_{n(k)}$ et $\alpha_{n(k)}(E(A(k)))=m(k)$.
5.c. On note d_k la $l(k)$-ème coordonnées de $E(A(k))$. Vérifier que d_k est bien défini.
6. On considère la suite $(d_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ainsi définie (avec $d_0=0$). Expliquez sommairement pourquoi la suite $(d_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est exactement celle qu'on obtiendrait en mettant bout à bout les coordonées des éléments de E pris dans l'ordre croissant.
7. Soit $t=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{d_k}{2^k}$ et soit $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par récurrence de la façon suivante :
- $r_0=t$;
- si $n\in\mathbf{N}$ alors $r_{n+1}=2r_n-$ partie entière de $(2r_n)$.
Montrer en utilisant les résultats des exercices précédents que si $y\in[0,1]$ alors il existe une suite extraite $(r_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ qui tend y.

Exercice 7.
1. Vérifier que la fonction qui à $t\in\mathbf{R}$ associe $\sin^2(\pi t)$ est 1-périodique.
2. Montrer que si $t\in[0,1]$ alors $\sin^2(2\pi t)=4\sin^2(\pi t)(1-\sin^2(\pi t))$.
3. Soit $t\in[0,1]$ et soit $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par récurrence de la façon suivante :
- $r_0=t$;
- si $n\in\mathbf{N}$ alors $r_{n+1}=2r_n-$ partie entière de $(2r_n)$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la relation $u_n=\sin^2(r_n)$ si $n\in\mathbf{N}$. Montrer que $u_0\in[0,1]$ et que $u_{n+1}=4u_n(1-u_n)$ si $n\in\mathbf{N}$.
4. On suppose que t est le réel considéré dans la dernière question de l'exercice précédent. Montrer que si $z\in[0,1]$ alors il existe une suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie dans la question précédente qui tend z.