Othocentre, réflexion, cocyclicité

Jean-Marie Lion
Université de Rennes 1

Énoncé Soit H l'orthocentre d'un triangle (A,B,C) non dégénéré et non rectangle.
1. Montrer que H est différent de A, B et C.
2. Calculer $(\widehat{(HA),(HB)})$ en fonction de $(\widehat{(CA),(CB)})$.
3. Soit K_C l'image de H par la réflexion par rapport à la droite (AB). Montrer que A, B, C et K_C sont cocycliques.
4. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle (A,B,C) et soit $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$, $\mathcal{C}_C$, les images de $\mathcal{C}$ par les réflexions par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB). Monrer que H est l'unique point commun aux trois cercles $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$, $\mathcal{C}_C$.

Une solution
1. Si $H = A$ par exemple alors la droite (AB) serait la hauteur (HB), elle serait donc orthogonale à la droite (CA) et (A,B,C) serait rectangle en A. Par contraposée H est différente de A. on montre de même que H et différent de B et C.
2. Puisque H est l'orthocentre de (A,B,C), les angles de droites $(\widehat{(HB),(CA)})$ et $(\widehat{(CB),(HA)})$ sont droits. Leur somme est nulle. Par addition il vient donc

$$\begin{aligned}(\widehat{(CA),(CB)}) &= (\widehat{(HB),(CA)}) + (\widehat{(CA),(CB)}) + (\widehat{(CB),(HA)}) \\ &= (\widehat{(HB),(HA)}).\end{aligned}$$

Puisque $(\widehat{(HA),(HB)}) = -(\widehat{(HB),(HA)})$ il vient $(\widehat{(HA),(HB)}) = -(\widehat{(CA),(CB)})$.
3. Puisque la réflexion τ_C par rapport à la droite (AB) transforme tout angle de droites en son opposé et que $\tau_C(H) = K_C$, $\tau_C(A) = A$ et $\tau_C(B) = B$ il vient

$$(\widehat{(K_CA),(K_CB)}) = -(\widehat{(HA),(HB)}) = (\widehat{(CA),(CB)}).$$

Ceci signifie que A, B, C et K_C sont cocycliques.
4. On montre de fçon analogue que les points K_A et K_B images de H par lex réflexions τ_A par rapport à la droite (BC) et τ_B par rapport à la droite (CA) sont sur le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle (A,B,C).

Un cercle est caractérisé par trois quelconques de ses points, une réfflexion est une involution et l'image d'un cercle par une réflexion est un cercle. Ainsi le cercle $\mathcal{C}$ qui est caractérisé par A, B et K_C (respectivement K_A, K_B) a pour image par τ_C (respectivement τ_A, τ_B) le cercle $\mathcal{C}_C$ (respectivement $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$) qui passe par $A = \tau_C(A)$, $B = \tau_C(B)$ et $H = \tau_C(K_C)$ (respectivement $H = \tau_A(K_A)$, $H = \tau_B(K_B)$. Le point H est donc commun aux trois cercles $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$, $\mathcal{C}_C$. Ces trois cercles sont deux à deux distincts car ce sont les images d'un même cercle par des réflexions par rapport à trois droites différentes et ils ont deux à deux deux points en commun exactement : $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B = \{C,H\}$, $\mathcal{C}_B \cap \mathcal{C}_C = \{A,H\}$ et $\mathcal{C}_C \cap \mathcal{C}_A = \{B,H\}$.