Les entiers relatifs et les nombres rationnels

(version provisoire du 4 mai 2008)

Jean-Marie Lion
Université de Rennes 1

I. Relation d'équivalence

I.1. définition Une *partition* d'un ensemble E est une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles non vides de E telle que

$$E = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$$

et telle que pour tout $(F, F') \in \mathcal{F}^2$, $F = F'$ dès que $F \cap F' \neq \emptyset$.

I.2. définition Soit E un ensemble muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$. La relation est dite *symétrique* si pour tout $(x, y) \in E \times E$ on a $y\mathcal{R}x$ dès que $x\mathcal{R}y$.

I.3. définition Soit E un ensemble muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$. La relation $\mathcal{R}$ est dite *d'équivalence* si elle est réflexive, transitive et symétrique.

I.4. définition Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Si $x \in E$ on appelle *classe d'équivalence* de x pour $\mathcal{R}$ et on note $\overline{x}$ (ou $\overline{x}^{\mathcal{R}}$) le sous-ensemble $\overline{x}$ des $y \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$. On appelle *ensemble quotient associé à* $\mathcal{R}$ et on note $\overline{E}$ ou $E/\mathcal{R}$ (ou encore $\overline{E}^{\mathcal{R}}$) l'ensemble des classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$.

I.5. proposition *Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Alors l'ensemble des classes $E/\mathcal{R}$ forme une partition de E. De plus, si F est une classe d'équivalence et si $x \in F$ alors $\overline{x} = F$.*

I.6. preuve Soit $x \in E$. Puisque $\mathcal{R}$ est réflexive, $x\mathcal{R}x$ et $x \in \overline{x}$. Par conséquent

$$E \subset \bigcup_{x \in E} \overline{x}.$$

Or, si $x \in E$ on a $\overline{x} \subset E$ et donc

$$\bigcup_{x \in E} \overline{x} \subset E.$$

Ceci implique par double inclusion que

$$E = \bigcup_{x \in E} \overline{x}.$$

Or, lorsque x décrit E sa classe $\overline{x}$ décrit $E/\mathcal{R}$. Par conséquent Ceci implique donc que

$$E = \bigcup_{F \in E/\mathcal{R}} F.$$

Soit F et F' deux classes d'équivalence. Il existe x, x' dans E tels que $F = \overline{x}$ et $F' = \overline{x'}$. On suppose que $F \cap F' \neq \emptyset$ c'est à dire $\overline{x} \cap \overline{x'} \neq \emptyset$. On va montrer que $F = F'$. Ceci montrera que les classes forment une partition de E et que si $F \in E/\mathcal{R}$ alors $F = \overline{x}$ quelque soit $x \in F$.

Puisque $\overline{x} \cap \overline{x'} \neq \emptyset$ il existe donc z dans E tel que $z \in \overline{x} \cap \overline{x'}$. On a donc $x\mathcal{R}z$ et $x'\mathcal{R}z$. Par symétrie on a $z\mathcal{R}x'$. Par transitivité on a $x\mathcal{R}x'$. À nouveau par symétrie on a $x'\mathcal{R}x$.

Soient $u \in \overline{x} = F$ et $v \in \overline{x'} = F'$. On a donc $x\mathcal{R}u$ et $x'\mathcal{R}v$. Puisque $x\mathcal{R}x'$ et $x'\mathcal{R}v$, par transitivité on a $x\mathcal{R}v$ et $v \in \overline{x}$. Ainsi $\overline{x'} \subset \overline{x}$. De même, puisque $x'\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}u$, par transitivité on a $x'\mathcal{R}u$ et $u \in \overline{x'}$. Ainsi $\overline{x} \subset \overline{x'}$. Ceci implique par double inclusion que $\overline{x} = \overline{x'}$ c'est à dire que $F = F'$.

I.7. proposition *Soit $\mathcal{P}$ une partition d'un ensemble E. La relation $\mathcal{R}$ définie sur E par $x\mathcal{R}y$ s'il existe $F \in \mathcal{P}$ tel que $x, y \in F$ est une realtion d'équivalence.*

I.8. preuve Soit $x, y, z \in E$. Puisque $\mathcal{P}$ est une partition de E il existe $F, G, H \in \mathcal{P}$ tels que $x \in F$, $y \in G$ et $z \in H$. De plus F, G et H sont les seuls éléments de $\mathcal{P}$ qui contiennent respectivement x, y et z.

On a $x\mathcal{R}x$ car $x \in F \in \mathcal{R}$. Par conséquent $\mathcal{R}$ est réflexive.

Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors il existe $F', G' \in \mathcal{P}$ tels que $x, y \in F'$ et $y, z \in G'$. En raison de l'unicité de F, G et H on a $F' = F$, $F' = G$, $G' = G$ et $G' = H$. ainsi $F = F' = G = G' = H$ c'est à dire $F = G = H$ et $x\mathcal{R}z$. Par conséquent $\mathcal{R}$ est transitive.

Si $x\mathcal{R}y$ alors il existe $F' \in \mathcal{P}$ tel que $x, y \in F'$. Donc $y\mathcal{R}x$. Ainsi $\mathcal{R}$ est symétrique.

Puisque $\mathcal{R}$ est réflexive, transitive et symétrique c'est une relation d'équivalence.

I.9. définition Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et d'une loi $\top$. La relation est dite *compatible* avec la loi si pour tout quadruplet (x, y, x', y') de E tel que $x\mathcal{R}y$ et $x'\mathcal{R}y'$ on a $(x \top x')\mathcal{R}(y \top y')$.

I.10. proposition *Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et d'une loi $\top$. On suppose que la relation est compatible avec la loi. Alors,* *si F et F' sont deux classes, l'ensemble*

$$\{(y \top y') : y \in F, y' \in F'\}$$

est inclus dans une classe d'équivalence unique notée $F \overline{\top} F'$.

I.11. preuve Soient F et F' deux classes d'équivalence et soient $x \in F$ et $x' \in F'$ fixés. Puisque les classes d'équivalence forment une partition de E, si l'ensemble

$$\{(y \top y') : y \in F, y' \in F'\}$$

est inclus dans une classe son intersection avec une autre classe est nécessairement vide. Il suffit donc de montrer que si $y \in F$ et $y' \in F'$ alors $(y \top y') \in \overline{(x \top x')}$. Or, puisque la relation est *compatible* avec la loi on a $(x \top x')\mathcal{R}(y \top y')$ et donc $(y \top y') \in \overline{(x \top x')}$.

I.12. définition Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et d'une loi $\top$. On suppose que la relation est *compatible* avec la loi. D'après la proposition précédente l'ensemble

$$\{(F, F', G) \in (E/\mathcal{R})^3 : \exists (x, x') \in F \times F' \ x \top x' \in G\}$$

est le graphe d'une loi définie sur $E/\mathcal{R}$. Cette loi est *la loi quotient de $\top$ par* $\mathcal{R}$ et elle est et notée $\overline{\top}$ la loi définie sur $E/\mathcal{R}$.

I.13. proposition *Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et d'une loi $\top$. On suppose que la relation est compatible avec la loi. Si $\top$ est associative (respectivement commutative) alors $\overline{\top}$ est associative (respectivement commutative). Si $\top$ admet un neutre noté e alors $\overline{e}$ est le neutre de $\overline{\top}$. Si de plus x' est l'inverse de x pour $\top$ alors $\overline{x'}$ est l'inverse de $\overline{x}$ pour $\overline{\top}$. Enfin, si la relation est compatible avec une seconde loi $\perp$ et si c'est seconde loi est distributive par rapport à $\top$ alors la loi $\overline{\perp}$ est distributive par rapport à $\overline{\top}$.*

I.14. preuve Soient F, F' et F'' des classes d'équivalence et $x \in F$, $x' \in F'$ et $x'' \in F''$: $F = \overline{x}$, $F' = \overline{x'}$ et $F'' = \overline{x''}$.

On a

$$\begin{array}{rcl} T \overline{\top} \ (T' \overline{\top} \ T'') & = & \overline{x} \overline{\top} \ (\overline{x'} \overline{\top} \ \overline{x''}) \\ & = & \overline{x} \overline{\top} \ \overline{(x' \top x'')} \\ & = & \overline{x \top (x' \top x'')} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} (T \overline{\top} \ T') \overline{\top} \ T'' & = & \overline{(\overline{x} \overline{\top} \ \overline{x'}) \overline{\top} \ \overline{x''}} \\ & = & \overline{(x \top x')} \overline{\top} \ \overline{x''} \\ & = & \overline{(x \top x') \top x''}. \end{array}$$

Si $\top$ est associative alors $x\top(x'\top x'') = (x\top x')\top x''$. Ceci implique que

$$T\overline{\top}\,(T'\overline{\top}\,T'') = (T\overline{\top}\,T')\overline{\top}\,T''$$

et donc que $\overline{\top}$ est associative.

On a

$$\begin{array}{rcl} T\overline{\top}\,T' & = & \overline{x}\overline{\top}\,\overline{x'} \\ & = & \overline{(x\top x')} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} T'\overline{\top}\,T & = & \overline{x'}\overline{\top}\,\overline{x} \\ & = & \overline{(x'\top x)}. \end{array}$$

Si $\top$ est commutative alors $(x\top x') = (x'\top x)$. Ceci implique que

$$T\overline{\top}T' = T'\overline{\top}T$$

et donc que $\overline{\top}$ est commutative.

Si $\top$ admet un neutre noté e alors

$$\begin{array}{rcl} T\overline{\top}\,\overline{e} & = & \overline{x}\overline{\top}\,\overline{e} \\ & = & \overline{(x\top e)} \\ & = & \overline{x} \\ & = & T \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \overline{e}\overline{\top}\,T & = & \overline{e}\overline{\top}\,\overline{x} \\ & = & \overline{(e\top x)} \\ & = & \overline{x} \\ & = & T. \end{array}$$

Ainsi la classe de e est le neutre de $\overline{\top}$. Si de plus x' est l'inverse de x alors on a

$$\begin{array}{rcl} \overline{x}\overline{\top}\,\overline{x'} & & \\ & = & \overline{(x\top x')} \\ & = & \overline{e} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \overline{x'}\overline{\top}\,\overline{x} & & \\ & = & \overline{(x'\top x)} \\ & = & \overline{e}. \end{array}$$

Ainsi la classe la classe de l'inverse x' de x (pour $\top$) est l'inverse de la classe de x (pour $\overline{\top}$).

Supposons que la relation soit compatible avec une seconde loi $\perp$ qui est distributive par rapport à $\top$. On a

$$x\perp(x'\top x'') = (x\perp x')\top(x\perp x'')$$

et

$$(x\top x')\perp x'' = (x\perp x'')\top(x'\top x'').$$

On a donc

$$\begin{array}{rcl}
T\overline{\perp}\,(T'\overline{\top}\,T'') & = & \overline{x}\overline{\perp}\,(\overline{x'}\overline{\top}\,\overline{x''}) \\
& = & \overline{x}\overline{\perp}\,\overline{(x'\top x'')} \\
& = & \overline{x\perp(x'\top x'')} \\
& = & \overline{(x\perp x')\top(x\perp x'')} \\
& = & \overline{(x\perp x')}\overline{\top}\overline{(x\perp x'')} \\
& = & (\overline{x}\overline{\perp}\,\overline{x'})\overline{\top}(\overline{x}\overline{\perp}\,\overline{x''}) \\
& = & (T\overline{\perp}T')\overline{\top}(T\overline{\perp}T'')
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}
(T\overline{\top}\,T')\overline{\perp}\,T'' & = & (\overline{x}\overline{\top}\,\overline{x'})\overline{\perp}\,\overline{x''} \\
& = & \overline{(x\top x')}\overline{\perp}\,\overline{x''} \\
& = & \overline{(x\top x')\perp x''} \\
& = & \overline{(x\perp x'')\top(x'\top x'')} \\
& = & \overline{(x\perp x'')}\overline{\top}\,\overline{(x'\perp x'')} \\
& = & (\overline{x}\overline{\perp}\,\overline{x''})\overline{\top}\,(\overline{x'}\overline{\perp}\,\overline{x''}) \\
& = & (T\overline{\perp}T'')\overline{\top}\,(T'\overline{\perp}T'').
\end{array}$$

Ainsi si $\perp$ est distributive par rapport à $\top$ alors $\overline{\perp}$ est distributive par rapport à $\overline{\top}$.

II. Les entiers relatifs

II.1. définition On munit $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ des deux lois $+$ et $\times$ définies par les formules suivantes. Si $(a,b)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ et $(c,d)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ alors

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

et

$$(a,b)\times(c,d) = (a\times c + b\times d, a\times d + b\times c).$$

II.2. remarque On a $(0,1)\times(0,1) = (1,0)$.

II.3. preuve En effet

$$\begin{aligned}(0,1)\times(0,1) &= (0\times 0+1\times 1, 0\times 1+1\times 0)\\ &= (1,0).\end{aligned}$$

II.4. proposition *Les lois $+$ et $\times$ sont associatives et commutatives. La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$. Le couple $(0,0)$ est l'élément neutre de la loi $+$. Le couple $(1,0)$ est le neutre de de la loi $\times$.*

II.5. preuve Associativité de $+$ et $\times$. Soient $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned}(a,b)+((c,d)+(e,f)) &= (a,b)+(c+e,d+f)\\ &= (a+(c+e),b+(d+f))\\ &= ((a+c)+e,(b+d)+f)\\ &= ((a+c),(b+d))+(e,d)\\ &= ((a,b)+(c,d))+(e,f)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(a,b)\times((c,d)\times(e,f)) &= (a,b)\times(c\times e+d\times f, d\times e+c\times f)\\ &= (a\times(c\times e+d\times f)+b\times(d\times e+c\times f),\\ &\qquad a\times(d\times e+c\times f)+b\times(c\times e+d\times f))\\ &= ((a\times c+b\times d)\times e+(a\times d+b\times c)\times f,\\ &\qquad (a\times c+b\times d)\times f+(a\times d+b\times c)\times e)\\ &= (a\times c+b\times d, a\times d+b\times c)\times(e,d)\\ &= ((a,b)\times(c,d))\times(e,f).\end{aligned}$$

Commutativité de $+$ et $\times$. Soient $(a,b),(c,d)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &= (a+c,b+d)\\ &= (c+a,d+b)\\ &= (c,d)+(a,b))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(a,b)\times(c,d) &= (a\times c+b\times d, a\times d+b\times c)\\ &= (c\times a+d\times b, c\times b+d\times a)\\ &= (c,d)\times(a,b).\end{aligned}$$

Distributivité de $\times$ par rapport à $+$. Soient $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$.

On a

$$\begin{array}{rcl}(a,b)\times((c,d)+(e,f)) & = & (a,b)\times(c+e,d+f)\\ & = & (a\times(c+e)+b\times(d+f),a\times(d+f))+b\times(c+e))\\ & = & ((a\times c+b\times d)+(a\times e+b\times f),\\ & & \quad (a\times d+b\times c)+(a\times f+b\times e))\\ & = & (a,b)\times(c,d)+(a,b)\times(e,f).\end{array}$$

Les neutres. Soit $(a,b)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$. On a

$$\begin{array}{rcl}(a,b)+(0,0) & = & (a+0,b+0)\\ & = & (a,b)\\ & = & (0+a,0+b),\\ & = & (0,0)+(a,b)\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}(a,b)\times(1,0) & = & (a\times 1+b\times 0,a\times 0+b\times 1)\\ & = & (a,b)\\ & = & (1\times a+0\times b,1\times b+0\times a),\\ & = & (1,0)\times(a,b).\end{array}$$

II.6. définition On considère sur $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ la relation $\mathcal{R}$ définie de la façon suivante. Soit (a,b) et (a',b') dans $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$. On a $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ si $a+b'=b+a'$.

II.7. proposition *La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence sont décrites de la façon suivante. Soit $(a,b)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$:*
- si $b\le a$ il existe un unique $n\in\mathbf{N}$ tel que $a=b+n$ et on a

$$\overline{(a,b)}=\overline{(n,0)}=\{(k+n,k):k\in\mathbf{N}\};$$

- si $a\le b$ il existe un unique $n\in\mathbf{N}$ tel que $a+n=b$ et on a

$$\overline{(a,b)}=\overline{(0,n)}=\{(k,k+n):k\in\mathbf{N}\}.$$

De plus si $n,m\in\mathbf{N}$ alors :
- $\overline{(n,0)}=\overline{(m,0)}$ si et seulement si $n=m$;
- $\overline{(0,n)}=\overline{(0,m)}$ si et seulement si $n=m$;
- $\overline{(n,0)}=\overline{(0,m)}$ si et seulement si $n=m=0$.

II.8. preuve On va montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Soit (a,b), (a',b'), $(a'',b'')\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$.

On a $a+b=b+a$ (commutativité des entiers naturels) donc $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$. La relation $\mathcal{R}$ est réflexive.

Si $a+b'=b+a'$ et $a'+b''=b'+a''$ alors $a+b''+(a'+b')=b+a''+(a'+b')$ (commutativité et associativité de l'addition des entiers naturels) et donc $a+b''=b+a''$ (car les entiers naturels sont réguliers pour l'addition). Ainsi si $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ et $(a',b')\mathcal{R}(a'',b'')$ alors $(a,b)\mathcal{R}(a'',b'')$. La relation $\mathcal{R}$ est transitive.

Si $a+b'=b+a'$ alors $a'+b=a+b'$ (commutativité de l'addition des entiers naturels). Ainsi si $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ alors $(a',b')\mathcal{R}(a,b)$. La relation $\mathcal{R}$ est symétrique.

Si $b\leq a$ on sait qu'il existe un unique $n\in\mathbf{N}$ tel que $a=b+n$. On a $a+0=b+n$ donc $(n,0)\in\overline{(a,b)}$. Si $k\in\mathbf{N}$ on a $a+k=(b+n)+k=b+(k+n)$ donc $(k+n,k)\in\overline{(a,b)}$. Soit maintenant $(a',b')\in\overline{(a,b)}$. Puisque que la relation est d'équivalence on a $(a',b')(n,0)$ et donc $a'=b'+n$. On pose $b'=k$ et on a bien (a',b') de la forme $(a',b')=(k+n,k)$.

Si $a\leq b$ on sait qu'il existe un unique $n\in\mathbf{N}$ tel que $b=a+n$. On a $a+n=b+0$ donc $(0,n)\in\overline{(a,b)}$. Si $k\in\mathbf{N}$ on a $a+(k+n)=(a+n)+k=b+k$ donc $(k,k+n)\in\overline{(a,b)}$. Soit maintenant $(a',b')\in\overline{(a,b)}$. Puisque que la relation est d'équivalence on a $(a',b')(0,n)$ et donc $a'+n=b'$. On pose $a'=k$ et on a bien (a',b') de la forme $(a',b')=(k,k+n)$.

soit n et m dans $\mathbf{N}$. On a $n=0+n=n+0=0+m=m+0=m$. Ceci implique que $\overline{(n,0)}=\overline{(m,0)}$ si et seulement si $n=m$ et que $\overline{(0,n)}=\overline{(0,m)}$ si et seulement si $n=m$. On a $n+m=0+0$ entraîne $n=m=0$. Par conséquent $\overline{(n,0)}=\overline{(0,m)}$ si et seulement si $n=m=0$.

II.9. définition L'ensemble $\mathbf{Z}$ *des entiers relatifs* est l'espace quotient

$$\mathbf{Z}=(\mathbf{N}\times\mathbf{N})/\mathcal{R}.$$

Les éléments de $\mathbf{Z}$ sont les *entiers relatifs*.

II.10. proposition *La relation $\mathcal{R}$ précédente est compatible avec $+$ et $\times$. De plus si $n\in\mathbf{N}$ on a*

$$\overline{(n,0)}\,\overline{+}\,\overline{(0,n)}=\overline{(0,n)}\,\overline{+}\,\overline{(n,0)}=\overline{(0,0)}.$$

Si $n, m \in \mathbf{N}$ *on a*

$$\begin{array}{lcll}
\overline{(n,0)}\overline{+}\overline{(m,0)} & = & \overline{(n+m,0)} & \\
\overline{(n,0)}\overline{\times}\overline{(m,0)} & = & \overline{(n\times m,0)} & \\
\overline{(0,n)}\overline{+}\overline{(0,m)} & = & \overline{(0,n+m)} & \\
\overline{(0,n)}\overline{\times}\overline{(0,m)} & = & \overline{(n\times m,0)} & \\
\overline{(n,0)}\overline{+}\overline{(0,m)} & = & \overline{(k,0)} & \text{avec } k\in\mathbf{N} \text{ tel que } m+k=n \\
 & & & \text{si } m\le n \\
\overline{(n,0)}\overline{+}\overline{(0,m)} & = & \overline{(0,k)} & \text{avec } k\in\mathbf{N} \text{ tel que } n+k=m \\
 & & & \text{si } n\le m \\
\overline{(n,0)}\overline{\times}\overline{(0,m)} & = & \overline{(0,n\times m)}. &
\end{array}$$

II.11. preuve Montrons la compatiblité de la relation avec les deux lois.

Soit (a, b), (a', b'), (c, d) et (c', d') dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ tels que $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$ et $(c, d)\mathcal{R}(c', d')$. On a donc $a + b' = b + a'$ et $c + d' = d + c'$.

En raison de l'associativité et de la commutativité de l'addition des entiers naturels il vient $(a + c) + (b' + d') = (b + d) + (a' + c')$ et donc

$$(a, b) + (c, d)\mathcal{R}(a', b') + (c', d').$$

La relation $\mathcal{R}$ est bien compatible avec $+$.

On pose $(a, b) \times (c, d) = (A, B)$ et $(a', b') \times (c', d') = (A', B')$. On a

$$\begin{array}{rcl}
A & = & a\times c + b\times d \\
B & = & a\times d + b\times c \\
A' & = & a'\times c' + b'\times d' \\
B' & = & a'\times d' + b'\times c'.
\end{array}$$

Par conséquent

$$\begin{array}{rcl}
A + B' & = & a\times c + b\times d + a'\times d' + b'\times c \\
B + A' & = & a\times d + b\times c + a'\times c' + b'\times d'
\end{array}$$

et si on pose $X = b' \times c + a' \times d + b' \times d + a' \times c$ on obtient en raison des propriétés de l'addition et de la multiplication des entiers naturels

$$\begin{array}{rcl}
A+B'+X & = & a\times c+b\times d+a'\times d'+b'\times c \\
 & & \qquad +b'\times c+a'\times d+b'\times d+a'\times c \\
 & = & (a+b')\times c+(b+a')\times d \\
 & & \qquad +a'\times(c+d')+b'\times(d+c') \\
B+A'+X & = & a\times d+b\times c+a'\times c'+b'\times d' \\
 & & \qquad +b'\times c+a'\times d+b'\times d+a'\times c \\
 & = & a'\times(d+c')+b'\times(c+d') \\
 & & \qquad +(a+b')\times d+(b+a')\times c.
\end{array}$$

On déduit alors des égalités $a+b'=b+a'$ et $c+d'=d+c'$ que

$$A+B'+X=B+A'+X$$

et donc, puisque les entiers naturels sont réguliers pour l'addition,

$$A+B'=B+A'.$$

Ceci signifie que

$$(a,b)\times(c,d)\mathcal{R}(a',b')\times(c',d').$$

La relation $\mathcal{R}$ est bien compatible avec $\times$.

Soit $n,m\in\mathbf{N}$.

On a $(n,0)+(0,n)=(0,n)+(n,0)=(n,n)$. Or $\overline{(n,n)}=\overline{(0,0)}$. Donc

$$\overline{(n,0)}\overline{+}\overline{(0,n)}=\overline{(0,n)}\overline{+}\overline{(n,0)}=\overline{(0,0)}.$$

On a $(n,0)+(m,0)=(n+m,0)$ donc $\overline{(n,0)}\overline{+}\overline{(m,0)}=\overline{(n+m,0)}$.
On a $(n,0)\times(m,0)=(n\times m,0)$ donc $\overline{(n,0)}\overline{\times}\overline{(m,0)}=\overline{(n\times m,0)}$.
On a $(0,n)+(0,m)=(0,n+m)$ donc $\overline{(0,n)}\overline{+}\overline{(0,m)}=\overline{(0,n+m)}$.
On a $(0,n)\times(0,m)=(n\times m,0)$ donc $\overline{(0,n)}\overline{\times}\overline{(0,m)}=\overline{(n\times m,0)}$.
Si $n=m+k$ avec $k\in\mathbf{N}$ alors

$$(n,0)+(0,m)=(n,m)=(m+k,m)=(m,m)+(k,0).$$

Or $\overline{(m,m)}=\overline{(0,0)}$. Par conséquent $\overline{(n,0)}\overline{+}\overline{(0,m)}=\overline{(k,0)}$.
Si $m=n+k$ avec $k\in\mathbf{N}$ alors

$$(n,0)+(0,m)=(n,m)=(n,n+k)=(n,n)+(0,k).$$

Or $\overline{(n,n)} = \overline{(0,0)}$. Par conséquent $\overline{(n,0)}\overline{+}\overline{(0,m)} = \overline{(0,k)}$.
On a $(n,0) \times (0,m) = (0, n \times m)$ donc $\overline{(n,0)}\overline{\times}\overline{(0,m)} = \overline{(0, n \times m)}$.

II.12. corollaire *Les lois $+$ et $\times$ induisent sur $\mathbf{Z}$ des lois $\overline{+}$ et $\overline{\times}$ qui sont associatives, commutatives, qui admettent chacune un élement neutre : $\overline{(0,0)}$ est le neutre pour $\overline{+}$ et $\overline{(1,0)}$ est le neutre pour $\overline{\times}$. Tout élément de $\mathbf{Z}$ admet un inverse pour $\overline{+}$.*

II.13. preuve C'est une conséquence immédiate de ce qui précède.

II.14. définition Un *groupe* est un couple $(G, \top)$ où G est un ensemble non vide et $\top$ est une loi de composition interne associative qui admet un élément neutre et telle que tout élémentde G admet un inverse. Si de plus $\top$ est commutative on dit que $(G, \top)$ est un *groupe commutatif.*

II.15. proposition *L'ensemble $\mathbf{Z}$ muni de la loi $\overline{+}$ est un groupe commutatif.*

II.16. preuve C'est une conséquence immédiate de ce qui précède.

II.17. définition Un *anneau* est un triplet $(A, \top, \perp)$ où $(A, \top)$ est un groupe commutatif et $\perp$ est une loi de composition interne associative, distributive par rapport à $\top$ et qui admet un élément neutre. Si de plus $\perp$ est commutative on dit que $(A, \top, \perp)$ est un *anneau commutatif.*

II.18. proposition *L'ensemble $\mathbf{Z}$ muni des lois $\overline{+}$ et $\overline{\times}$ est un anneau commutatif.*

II.19. preuve C'est une conséquence immédiate de ce qui précède.

II.20. remarque On déduit de ce qui précède qu'en identifiant $n \in \mathbf{N}$ à la classe $\overline{(n,0)}$ les lois $\overline{+}$ et $\overline{\times}$ prolongent à $\mathbf{Z}$ les lois $+$ et $\times$ de $\mathbf{N}$. De plus toute classe de $\mathbf{Z}$ admet un représentant unique de la forme $(n,0)$ ou de la forme $(0,n)$ avec $n \in \mathbf{N}$.

II.21. notation Si $n \in \mathbf{N}$ on identifie la classe de $(n,0)$ à n et on note $(-n)$ la classe de $(0,n)$. On note $+$ et $\times$ les lois $\overline{+}$ et $\overline{\times}$ de $\mathbf{Z}$. Si $n, m \in \mathbf{Z}$ on pose

$$n + (-m) = (-m) + n = n - m.$$

II.22. convention On utilise les propriétés d'associativité et de commutativité de $+$ et $\times$ et on donne la priorité de $\times$ sur $+$ pour simplifier le parenthésage. Le symbole $\times$ et parfois omis. Ainsi le produit $a \times b$ peut être noté ab.

II.23. lemme *Si $n, m \in \mathbf{Z}$ il existe un unique $k \in \mathbf{N}$ tel que $n + k = m$ ou $m + k = n$.*

II.24. preuve Il existe un entier naturel k tel que $m - n = \overline{(k, 0)}$ ou $m - n = \overline{(0, k)}$. Dans le premier cas $n + k = m$ et dans le second $m + k = n$.

II.25. proposition *On prolonge à $\mathbf{Z}$ l'ordre de $\mathbf{N}$ en un ordre total sur $\mathbf{Z}$ compatible avec l'addition et avec la multiplication par des entiers naturels en posant pour $m, n \in \mathbf{Z}$ $n \leq m$ s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $m = n + k$. On définit ainsi sur $\mathbf{Z}$ l'unique ordre compatible avec l'addition et tel que* $0 \leq 1$.

II.26. preuve Montrons qu'on a bien défini un ordre total. Si $n, m \in \mathbf{Z}$ alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $n = m + k$ ou $m = n + k$. Par conséquent on a $n \leq m$ ou $m \leq n$. La relation $\leq$ est réflexive car si $n \in \mathbf{Z}$ alors $n + 0 = n$ et donc $n \leq n$. La relation est bien antisymétrique car si $n, m \in \mathbf{Z}$ et $k, k' \in \mathbf{N}$ sont tels que $n = m + k$ et $m = n + k'$ alors $n = n + (k' + k)$, $k + k' = 0$ et donc, puisque $k, k' \in \mathbf{N}$, $k = k' = 0$. Ainsi $n = m$. Ceci signifie que si $n \leq m$ et $m \leq n$ alors $n = m$. La relation est bien transitive car si $n, m, p \in \mathbf{Z}$ et $k, h \in \mathbf{N}$vérifient $n + k = m$ et $m + h = p$ alors $n + (k + h) = p$. Ceci signifie que si $n \leq m$ et $m \leq p$ alors $n \leq p$.

Montrons que l'ordre est compatible avec l'addition. Soit $n, m \in \mathbf{Z}$ tels que $n \leq m$ et soit $p \in \mathbf{Z}$. Il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $m = n + k$. On a $m + p = p + m = (n + p) + k = (p + n) + k$. Par conséquent

$$n + p = p + n \leq m + p = p + m.$$

Montrons que l'ordre est compatible avec la multiplication par des entiers naturels. Soit $n, m \in \mathbf{Z}$ tels que $n \leq m$ et soit $p \in \mathbf{N}$. Il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $m = n + k$. On a $m \times p = p \times m = n \times p + k \times p = p \times n + p \times k$ et $p \times k = k \times p \in \mathbf{N}$. Par conséquent

$$p \times n = n \times p \leq p \times m = m \times p.$$

Expliquons l'unicité. La preuve reprend une preuve relative à $\mathbf{N}$. Soit $\leq'$ un ordre sur $\mathbf{Z}$ qui est compatible avec l'adddition et tel que $0 \leq' 1$. On note M l'ensemble

$$M = \{n \in \mathbf{N} : 0 \leq' n\}.$$

On va montrer par récurrence que $M = \mathbf{N}$. L'ensemble M est non vide car il contient 0 et 1. Soit $n \in M$. Puisque l'ordre $\leq'$ est compatible avec l'addition et que $0 \leq' 1$ il vient $n \leq' n + 1$. Puisque $n \in M$ on a aussi $0 \leq' n$. Par transitivité de $\leq'$ il vient $0 \leq' n+1$ et donc $(n+1) \in M$. Ceci prouve que $M = \mathbf{N}$. Il reste à montrer que si $n, m \in \mathbf{Z}$ sont tels que $n \leq m$ alors $n \leq' m$. Soit donc $n, m \in \mathbf{Z}$ tels que $n \leq m$. Il existe donc $k \in \mathbf{N}$ tel $m = n + k$. On a donc $0 \leq' k$. Puisque $\leq'$ est compatible avec l'addition ceci implique que $n \leq' m$.

II.27. proposition *Soit $X \subset \mathbf{Z}$. Si X est non vide et minoré il admet un plus petit élément. S'il est non vide et majoré il admet un plus grand élément.*

II.28. preuve On suppose que X contient un élément x et que X est minoré par y. Soit $E = \{n \in \mathbf{N} : y + n \in X\}$. L'ensemble E est un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ qui est non vide car il contient $x - y$. Il admet donc un plus petit élément m. On pose $x' = y + m$. C'est un élément de X donc $y \leq x'$. Soit $q \in \mathbf{Z}$ tel que $q < x'$. Si $q < y$ alors $q \notin X$ car y est un minorant de X. Si $y \leq q < x'$ alors $0 \leq q - y < x' - y = m$. Ainsi $q - y$ est un entier naturel strictement inférieur à m. Il n'appartient donc pas à E et $q = y + (q - y)$ n'appartient pas à X. Ainsi x' est le plus petit élément de X.

On suppose maintenant que X contient un élément x et que X est majoré par z. Soit $E = \{n \in \mathbf{N} : z - n \in X\}$. L'ensemble E est un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ qui est non vide car il contient $z - x$. Il admet donc un plus petit élément m. On pose $x' = z - m$. C'est un élément de X donc $x' \leq z$. Soit $q \in \mathbf{Z}$ tel que $x' < q$. Si $z < q$ alors $q \notin X$ car z est un majorant de X. Si $x' < q \leq z$ alors $0 \leq z - q < z - x' = m$. Ainsi $z - q$ est un entier naturel strictement inférieur à m. Il n'appartient donc pas à E et $q = z - (z - q)$ n'appartient pas à X. Ainsi x' est le plus grand élément de X.

III. Les nombres rationnels

III.1. notation On pose $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

III.2. définition On munit $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ de deux lois $+$ et $\times$ définies de la façon suivantes. Si $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ et $(p', q') \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ alors

$$(p, q) + (p', q') = (p \times q' + p' \times q, q \times q')$$

et

$$(p, q) \times (p', q') = (p \times p', q \times q').$$

III.3. remarque Ce sont bien des lois de composition interne car $\mathbf{N}^*$ est stable par multplication.

III.4. remarque Si $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ alors

$$(p, q) = (p, 1) \times (1, q).$$

III.5. proposition *Les lois* $+$ *et* $\times$ *sont associatives et commutatives. Elles admettent respectivement* $(0, 1)$ *et* $(1, 1)$ *comme neutres.*

III.6. preuve Soit (p, q), (p', q') et (p'', q'') dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$.

On a

$$\begin{array}{rcl} (p,q) + ((p',q') + (p'',q'')) & = & (p,q) + (p' \times q'' + p'' \times q', q' \times q'') \\ & = & (p \times q' \times q'' + (p' \times q'' + p'' \times q') \times q, q \times q' \times q'') \\ & = & ((p \times q' + p' \times q) \times q'' + p'' \times q \times q', q \times q' \times q'') \\ & = & (p \times q' + p' \times q, q \times q') \times (p'', q'') \\ & = & ((p,q) + (p',q')) + (p'',q'') \end{array}$$

donc $+$ est associative.

On a

$$\begin{array}{rcl} (p,q) \times ((p',q') \times (p'',q'')) & = & (p,q) \times (p' \times p'', q' \times q'') \\ & = & (p \times p' \times p'', q \times q' \times q'') \\ & = & (p \times p', q \times q') \times (p'', q'') \\ & = & ((p,q) \times (p',q')) \times (p'',q'') \end{array}$$

donc $\times$ est associative.

On a

$$\begin{array}{rcl} (p,q) + (p',q') & = & (p \times q' + p' \times q, q \times q') \\ & = & (p' \times q + p \times q', q' \times q) \\ & = & (p',q') + (p,q) \end{array}$$

donc $+$ est commutative.

On a

$$\begin{array}{rcl} (p,q) \times (p',q') & = & (p \times p', q \times q') \\ & = & (p' \times p, q' \times q) \\ & = & (p',q') \times (p,q) \end{array}$$

donc $\times$ est commutative.

On a

$$\begin{array}{rcl} (p,q) + (0,1) & = & (p \times 1 + 0 \times q, q \times 1) \\ & = & (p,q) \\ & = & (0 \times q + p \times 1, 1 \times q) \\ & = & (0,1) + (p,q) \end{array}$$

donc $(0,1)$ est le neutre de $+$.

On a

$$\begin{aligned}(p,q)\times(1,1) &= (p\times 1, q\times 1)\\ &= (p,q)\\ &= (1\times p, 1\times q)\\ &= (1,1)\times(p,q)\end{aligned}$$

donc $(1,1)$ est le neutre de $\times$.

III.7. définition On consière la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$ de la façon suivante. Soit $(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$ et $(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$. Alors $(p,q)\mathcal{R}(p',q')$ si $p\times q' = q\times p'$.

III.8. remarque On a

$$\overline{(1,1)} = \{(n,n) : n\in\mathbf{N}^*\}$$

et la régularité des éléments non nuls de $\mathbf{Z}$ implique que

$$\overline{(0,1)} = \{(0,n) : n\in\mathbf{N}^*\}.$$

III.9. proposition *La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence compatible avec les lois $+$ et $\times$.*

III.10. preuve

Montrons pour commencer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, c'est à dire une relation réflexive, transitive et symétrique. Soit (p,q), (p',q') et (p'',q'') dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$.

On a $(p,q)\mathcal{R}(p,q)$ car $p\times q = q\times p$. La relation $\mathcal{R}$ est donc réflexive.

Si $(p,q)\mathcal{R}(p',q')$ et $(p',q')\mathcal{R}(p'',q'')$ alors $p\times q' = p'\times q$ et $p'\times q'' = p''\times q'$. Puisque q, q' et q'' sont non nuls donc réguliers, ces égalités impliquent que si l'un des trois nombres p, p' ou p'' est nul alors les trois le sont et donc dans ce cas $(p,q)\mathcal{R}(p'',q'')$. On suppose que les nombres p, p' et p'' sont non nuls. En multipliant ces inégalités et en utilisant l'associativité et la commutativité de la multiplication dans $\mathbf{Z}$ on obtient

$$(q'\times p')\times p\times q'' = (q'\times p')\times p''\times q.$$

Puisque p' et q' sont non nuls le produit $(q'\times p')$ est non nul donc régulier. Par conséquent on déduit de l'égalité précédente l'égalité

$$p\times q'' = p''\times q$$

qui signifie que $(p,q)\mathcal{R}(p'',q'')$. La relation $\mathcal{R}$ est donc transitive.

Si $(p,q)\mathcal{R}(p',q')$ alors $p \times q' = p' \times q$ et donc $p' \times q = p \times q'$, ceci signifie que $(p',q')\mathcal{R}(p,q)$. La relation $\mathcal{R}$ est symétrique.

Montrons que $\mathcal{R}$ est compatible avec $+$ et $\times$. Puisque les deux lois sont commutatives il suffit de montrer que si (p,q), (p',q') et (p'',q'') sont des éléments de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ tels que $(p,q)\mathcal{R}(p',q')$ alors

$$(p,q) + (p'',q'')\mathcal{R}(p',q') + (p'',q'')$$

et

$$(p,q) \times (p'',q'')\mathcal{R}(p',q') \times (p'',q'').$$

Puisque $(p,q)\mathcal{R}(p',q')$ on a $p \times q' = p' \times q$. Cette égalité implique que

$$(p \times q'') \times (q' \times q'') = (p' \times q'') \times (q \times q'').$$

Or on a aussi $(p'' \times q) \times (q' \times q'') = (p'' \times q') \times (q \times q'')$. Par conséquent en sommant ces deux égalités il vient

$$(p \times q'' + p'' \times q) \times (q' \times q'') = (p' \times q'' + p'' \times q') \times (q \times q'').$$

Or

$$(p,q) + (p'',q'') = (p \times q'' + p'' \times q, q \times q'')$$

et

$$(p',q') + (p'',q'') = (p' \times q'' + p'' \times q', q' \times q'').$$

Par conséquent on a bien $(p,q)+(p'',q'')\mathcal{R}(p',q')+(p'',q'')$ et $\mathcal{R}$ est compatible avec $+$. L'égalité $p \times q' = p' \times q$ implique aussi

$$(p \times p'') \times (q' \times q'') = (p' \times p'') \times (q \times q'').$$

Or

$$(p,q) \times (p'',q'') = (p \times p'', q \times q'')$$

et

$$(p',q') \times (p'',q'') = (p' \times p'', q' \times q'').$$

Par conséquent on a bien $(p,q)\times(p'',q'')\mathcal{R}(p',q')\times(p'',q'')$ et $\mathcal{R}$ est compatible avec $\times$.

III.11. définition L'ensemble quotient $(\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*)/\mathcal{R})$ est appelé *ensemble des nombres rationnels* et il est noté $\mathbf{Q}$. Les éléments de $\mathbf{Q}$ s'appellent les *nombres rationnels.*

III.12. remarque D'après ce qui précèdent les lois $+$ et $\times$ induisent sur $\mathbf{Q}$ des lois $\overline{+}$ et $\overline{\times}$ qui sont associatives, commutatives et qui admettent comme neutres respectifs les classes $\overline{(0,1)}$ et $\overline{(1,1)}$.

III.13. proposition *Tout élément de* $\mathbf{Q}$ *admet un inversse pour* $\overline{+}$ *et tout élément de* $\mathbf{Q}$ *différent de* $\overline{(0,1)}$ *admet un inverse pour* $\overline{\times}$. *Plus précisément si* $(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ *alors*

$$\overline{(p,q)}\overline{+}\overline{(-p,q)} = \overline{(0,1)}.$$

Si de plus $p \neq 0$ *alors*

$$\overline{(p,q)}\overline{\times}\overline{(q,p)} = \overline{(1,1)}.$$

III.14. preuve Soit $(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$. On a

$$\begin{array}{rcl} (p,q) + (-p,q)) & = & (p \times q + (-p) \times q, q \times q) \\ & = & ((p-p) \times q, q \times q) \\ & = & (0,q) \end{array}$$

ce qui donne en passant aux classes

$$\overline{(p,q)}\overline{+}\overline{(-p,q)} = \overline{(0,1)}.$$

Si de plus $p \neq 0$ alors

$$\begin{array}{rcl} (p,q) \times (q,p)) & = & (p \times q, p \times q) \\ & = & (p \times q, p \times q) \end{array}$$

ce qui donne en passant aux classes

$$\overline{(p,q)}\overline{\times}\overline{(q,p)} = \overline{(1,1)}.$$

III.15. proposition *La loi* $\overline{\times}$ *est distributive par rapport à la loi* $\overline{+}$.

III.16. preuve Soit (p,q), (p',q') et (p'',q'') dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$. On a

$$\begin{array}{rcl} (p,q) \times ((p',q') + (p'',q'')) & = & (p,q) \times (p' \times q'' + p'' \times q', q' \times q'') \\ & = & (p \times (p' \times q'' + p'' \times q'), q \times q' \times q'') \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} ((p,q) \times (p',q')) + ((p,q) \times (p'',q'')) & = & (p \times p', q \times q') + (p \times p'', q \times q'') \\ & = & (p \times p' \times q \times q'' + p \times p'' \times q \times q', \\ & & \qquad q \times q' \times q \times q'') \\ & = & (q \times (p \times (p' \times q'' + p'' \times q'))), \\ & & \qquad q \times (q \times q' \times q'')). \end{array}$$

Or

$$(p\times(p'\times q''+p''\times q'), q\times q'\times q'')\mathcal{R}(q\times(p\times(p'\times q''+p''\times q'))), q\times(q\times q'\times q'')).$$

Par conséquent

$$(p,q)\times((p',q')+(p'',q''))\mathcal{R}((p,q)\times(p',q'))+((p,q)\times(p'',q''))$$

c'est à dire

$$\overline{(p,q)}\overline{\times}(\overline{(p',q')}\overline{+}\overline{(p'',q'')})\mathcal{R}(\overline{(p,q)}\overline{\times}\overline{(p',q')})\overline{+}(\overline{(p,q)}\overline{\times}\overline{(p'',q'')}).$$

La loi $\overline{\times}$ est distributive par rapport à la loi $\overline{+}$.

III.17. définition Un *corps* est un anneau $(A,\top,\perp)$ tel que tout élément de A différent du neutre de $\top$ admet un inverse pour $\perp$. Si de plus $\perp$ est commutative on dit que $(A,\top,\perp)$ est un *corps commutatif.*

III.18. proposition *L'ensemble* $\mathbf{Q}$ *muni des lois* $\overline{+}$ *et* $\overline{\times}$ *est un corps commutatif.*

III.19. preuve C'est une conséquence des résultats précédents.

III.20. proposition *L'application* $\mathbf{i}$ *qui à* $p\in\mathbf{Z}$ *associe la classe* $\overline{(p,1)}\in\mathbf{Q}$ *est injective et elle vérifie*

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{i}(0) & = & \overline{(0,1)}\\ \mathbf{i}(1) & = & \overline{(1,1)}\\ \mathbf{i}(p+p') & = & \overline{(p,1)}\overline{+}\overline{(p',1)}\\ \mathbf{i}(p\times p') & = & \overline{(p,1)}\overline{\times}\overline{(p',1)}.\end{array}$$

III.21. preuve On a $\mathbf{i}(0)=\overline{(0,1)}$ et $\mathbf{i}(1)=\overline{(1,1)}$ par définition et si $p,p'\in\mathbf{Z}$ alors

$$(p,1)+(p',1)=(p+p',1)$$

et

$$(p,1)\times(p',1)=(p\times p',1).$$

On conclut par passage aux classes.

III.22. convention Les lois $\overline{\times}$ et $\overline{+}$ sont dorénavant notées $+$ et $\times$. Comme pour les relatifs, on utilise les propriétés d'associativité et de commutativité de $+$ et $\times$ et on donne la priorité de $\times$ sur $+$ pour simplifier le parenthésage. Le symbole $\times$ et parfois omis. Ainsi le produit $a \times b$ peut être noté ab.

III.23. notation On a identifie $\mathbf{N}$ à une sous-partie de $\mathbf{Z}$. La proposition précédente permet d'identifier $\mathbf{Z}$ à une sous-partie de $\mathbf{Q}$. On a $\overline{(0,1)} = 0$ et $\overline{(1,1)} = 1$.

Si $r \in \mathbf{Q}$ on note $(-r)$ l'inverse de r pour $+$. Si $s \in \mathbf{Q}$ on pose

$$s + (-r) = (-r) + s = s - r.$$

Si $r \in \mathbf{Q}$ et $r \neq 0$ on note $\dfrac{1}{r}$ l'inverse de r pour $\times$. Si $s \in \mathbf{Q}$ on pose

$$s \times \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \times s = \frac{s}{r}.$$

En particulier si $(p,q), (p',q') \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} \overline{(p,q)} &= \frac{p}{q} \\ \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} &= \frac{p \times q' + p'q}{q \times q'} \\ \frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} &= \frac{p \times p'}{q \times q'}. \end{aligned}$$

III.24. définition On note $\mathbf{Q}_+$ l'ensemble des rationnels qui admettent un représentant de la forme $\overline{(p,q)}$ avec $(p,q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$. Les éléments de $\mathbf{Q}_+$ sont appelelés *nombres rationnels positifs.*

III.25. lemme *Soit $t, u \in \mathbf{Q}_+$. Alors $t + u, t \times u \in \mathbf{Q}_+$ et si $t + u = 0$ alors $t = u = 0$.*

III.26. preuve Soit (p,q) et (p',q') dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ tels que $t = \dfrac{p}{q}$ et $u = \dfrac{p'}{q'}$. On a $t + u = \dfrac{p \times q' + p \times' q}{q \times q'}$ et $t \times u = \dfrac{p \times p'}{q \times q'}$. Par conséquent $t + u \in \mathbf{Q}^+$ et $t \times u \in \mathbf{Q}^+$. De plus si $t + u = 0$ alors $p \times q' + p' \times q = 0$. Ceci implique d'abord $p \times q' = p' \times q = 0$ et ensuite, puisque q et q' sont non nuls, $p = p' = 0$ c'est à dire $t = u = 0$.

III.27. proposition *On prolonge à $\mathbf{Q}$ l'ordre de $\mathbf{Z}$ en un ordre total sur $\mathbf{Q}$ compatible avec l'addition et avec la multplication par les rationnels positifs* *en posant pour $r, s \in \mathbf{Q}$ $r \leq s$ s'il existe $t \in \mathbf{Q}_+$ tel que $s = r + t$. On définit ainsi sur $\mathbf{Q}$ l'unique ordre compatible avec l'addition et tel que $0 \leq 1$.*

III.28. preuve Montrons qu'on a bien défini un ordre total. Si $r, s \in \mathbf{Q}$ alors il existe $t \in \mathbf{Q}_+$ tel que $s = r + t$ ou $r = s + t$. Par conséquent on a $r \leq s$ ou $s \leq r$. La relation $\leq$ est réflexive car si $r \in \mathbf{Q}$ alors $r + 0 = r$. Or $0 \in \mathbf{Q}_+$ donc $r \leq r$. La relation est bien antisymétrique car si $r, s \in \mathbf{Q}$ et $t, u \in \mathbf{Q}_+$ sont tels que $s = r + t$ et $r = s + u$ alors $s = s + (t + u)$ c'est à dire $t + u = 0$ et d'après le lemme $t = u = 0$ et donc $r = s$: ceci signifie que si $r \leq s$ et $s \leq r$ alors $r = s$. La relation est bien transitive car si $r, s, t \in \mathbf{Q}$ et $u, v \in \mathbf{Q}_+$ vérifient $s = r + u$ et $t = s + v$ alors $t = r + (r + u)$ et d'après le lemme $r + u \in \mathbf{Q}_+$: ceci signifie que si $r \leq s$ et $s \leq t$ alors $r \leq t$. Ainsi la relation $\leq$ est réflexive, antisymétrique et transitive et tous les élements sont comparables. C'est une relation d'ordre total.

Montrons que l'ordre est compatible avec l'addition. Soit $r, s \in \mathbf{Q}$ tels que $r \leq s$ et soit $u \in \mathbf{Q}$. Il existe $t \in \mathbf{Q}_+$ tel que $s = r + t$. On a $s + u = u + s = (r + u) + t = (u + r) + k$. Par conséquent

$$r + u = u + r + \leq s + u = u + s.$$

Montrons que l'ordre est compatible avec la multiplication par des rationnels positifs. Soit $r, s \in \mathbf{Q}$ tels que $r \leq s$ et soit $u \in \mathbf{Q}_+$. Il existe $t \in \mathbf{Q}_+$ tel que $s = r + t$. On a $s \times u = u \times s = r \times u + t \times u = u \times r + u \times t$ et $u \times t = t \times u \in \mathbf{Q}_+$. Par conséquent

$$s \times u = u \times s \leq r \times u = u \times r.$$

Expliquons l'unicité. La preuve reprend une preuve relative à $\mathbf{N}$. Soit $\leq'$ un ordre sur $\mathbf{Q}$ qui est compatible avec l'adddition et tel que $0 \leq' 1$.

On note M l'ensemble

$$M = \{n \in \mathbf{N} : 0 \leq' n\}.$$

On va montrer par récurrence que $M = \mathbf{N}$. L'ensemble M est non vide car il contient 0 et 1. Soit $n \in M$. Puisque l'ordre $\leq'$ est compatible avec l'addition et que $0 \leq' 1$ il vient $n \leq' n + 1$. Puisque $n \in M$ on a aussi $0 \leq' n$. Par transitivité de $\leq'$ il vient $0 \leq' n + 1$ et donc $(n + 1) \in M$. Ceci prouve que $M = \mathbf{N}$.

Soit $q \in \mathbf{N}^*$. On note M_q l'ensemble

$$M_q = \{n \in \mathbf{N} : 0 \leq' \frac{n}{q}\}.$$

Observons que $0 \in M_q$. On va prouver que $M_q = \mathbf{N}$. Pour commencer on va montrer que soit $M_q = \{0\}$ soit $M_q = \mathbf{N}$. On a $\dfrac{1}{q} \neq' 0$. Supposons que $1 \notin M_q$ c'est à dire $\dfrac{1}{q} \leq' 0$. Sous cette hypothèse, si $p \in \mathbf{N} \setminus M_q$ c'est à dire si $p \in \mathbf{N}$ est tel que $\dfrac{p}{q} \leq' 0$, alors, puisque $\leq'$ est compatible avec l'addition on a $\dfrac{p+1}{q} = \dfrac{p}{q} + \dfrac{1}{q} \leq' 0$. Or $\dfrac{p+1}{q} \neq 0$. Donc $p+1 \notin M_q$. Ceci prouve par récurrence que si $1 \notin M_q$ alors $M_q = \{0\}$. Supposons maintenant que $1 \in M_q$ c'est à dire $0 \leq' \dfrac{1}{q}$. Sous cette hypothèse, si $p \in \mathbf{M}_q$ c'est à dire si $p \in \mathbf{N}$ est tel que $0 \leq' \dfrac{p}{q}$, alors, puisque $\leq'$ est compatible avec l'addition on a $0 \leq' \dfrac{p+1}{q} = \dfrac{p}{q} + \dfrac{1}{q}$. Or $\dfrac{p+1}{q} \in \mathbf{N}$. Donc $p+1 \in M$. Ceci prouve par récurrence que si $1 \in M_q$ alors $M_q = \mathbf{N}$. Pour prouver que $M = \mathbf{N}$ il reste donc à prouver qu'il contient un entier non nul. C'est le cas : $q \in M$ car $0 \leq' 1 = \dfrac{q}{q}$.

Soit $t \in \mathbf{Q}_+$. Il existe $(p, q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ tel que $t = \dfrac{p}{q}$. D'apès ce qui précède $p \in M_q$ c'est à dire $0 \leq' \dfrac{p}{q}$ ou encore $0 \leq' t$.

Il reste à montrer que si $r, s \in \mathbf{Q}$ sont tels que $r \leq s$ alors $r \leq' s$. Soit donc $r, s \in \mathbf{Q}$ tels que $r \leq s$. Il existe donc $t \in \mathbf{Q}_+$ tel $s = r+t$. Puisque $t \in \mathbf{Q}_+$ on a $0 \leq' t$. Puisque $\leq'$ est compatible avec l'addition on a $r = r+0 \leq' r+t = s$ c'est à dire $r \leq' s$.