Les nombres réels

(version provisoire du 9 mai 2008)

Jean-Marie Lion
Université de Rennes 1

I. Minorants et majorants, bornes supérieures et inférieures

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$.

I.1. définition Un *minorant* d'un sous-ensemble X de E est un élément y tel que pour tout $x \in X$ on a $y \leq x$. Un *majorant* d'un sous-ensemble X de E est un élément z tel que pour tout $x \in X$ on a $x \leq z$.

I.2. proposition *Si z est un majorant d'un sous-ensemble non vide X de E et y un minorant alors $y \leq z$.*

I.3. preuve Puisque X est non vide il possède au moins un élément x. On a $y \leq x$ et $x \leq z$ et par transitivité $y \leq z$.

I.4. proposition *Soit X et X' deux sous-ensembles non vides de E tels que $X \subset X'$. Si y est un minorant de X' c'est aussi un minorant de X. Si z est un majorant de de X' alors c'est aussi un majorant de X.*

I.5. preuve On suppose que y est un minorant de X'. Soit $x \in X$ qui est supposé non vide. Puisque $X \subset X'$ on a $x \in X'$ et donc $y \leq x$. Puisque cette inégalité est vraie pour tout $x \in X$ on a que y est un minorant de X.

De même, on suppose que z est un majorant de X'. Soit $x \in X$. Puisque $X \subset X'$ on a $x \in X'$ et donc $x \leq z$. Puisque cette inégalité est vraie pour tout $x \in X$ on a que z est un majorant de X.

I.6. définition Un sous-ensemble X de E est dit *minoré* s'il possède un minorant. Il est dit *majoré* s'il possède un majorant. Il est dit *borné* si il est minoré et majoré.

I.7. définition Un *élément minimal* (ou *plus petit élément*) d'un sous-ensemble X de E est un minorant de X qui appartient à X. Un *élément maximal* (ou *plus grand élément*) d'un sous-ensemble X de E est un majorant de X qui appartient à X.

I.8. proposition *Un sous-ensemble X de E possède au plus un élément minimal et au plus un élément maximal.*

I.9. preuve Soit m et m' des éléments minimaux de X. Puisque $m \in X$ et que m' est un minorant de X on a $m' \leq m$ et puisque $m' \in X$ et que m est un minorant de X on a $m \leq m'$. Finalement $m' \leq m$ et $m \leq m'$. Puisque $\leq$ est une relation d'ordre donc antisymétrique on a $m = m'$.

Soit M et M' des éléments maximaux de X. Puisque $M \in X$ et que M' est un majorant de X on a $M \leq M'$ et puisque $M' \in X$ et que M est un majorant de X on a $M' \leq M$. Finalement $M \leq M'$ et $M' \leq M$. Puisque $\leq$ est une relation d'ordre donc antisymétrique on a $M = M'$.

I.10. notation Si X possède un élément minimal celui-ci est désigné par $\min X$. S'il possède un élément maximal celui-ci est désigné par $\max X$.

I.11. définition Un sous-ensemble non vide X de E admet *une borne inférieure* si l'ensemble de ses minorants possède un élément maximal. Un sous-ensemble non vide X de E admet *une borne supérieure* si l'ensemble de ses majorants possède un élément minimal.

I.12. proposition *Un sous-ensemble X de E possède au plus une borne inférieure et au plus une borne supérieure.*

I.13. preuve Si I et I' sont des bornes inférieures de X alors se sont les éléments maximaux de l'ensemble des minorants de X. Ils sont donc égaux d'après la proposition précédente.

Si S et S' sont des bornes supérieures de X alors se sont les éléments minimaux de l'ensemble des majorants de X. Ils sont donc égaux d'après la proposition précédente.

I.14. notation Si X possède une borne inférieure celle-ci est désignée par $\inf X$. S'il possède une borne supérieure celle-ci est désignée par $\sup X$.

I.15. remarque Si X non vide possède une borne inférieure et une borne supérieure alors $\inf X \leq \sup X$ car $\inf X$ est un minornant et $\sup X$ un majorant.

I.16. proposition *Si X possède un élément minimal il possède une borne inférieure et* $\min X = \inf X$. *Si X possède un élément maximal il possède une borne supérieure et* $\max X = \sup X$.

I.17. preuve Il suffit d'observer que si $\min X$ existe alors tout minorant de X est inférieur ou égal à $\min X$ et donc $\min X$ est le plus grand des minorants de X : ainsi $\min X = \inf X$. De même, si $\max X$ existe alors tout majorant de X est supérieur ou égal à $\max X$ et donc $\max X$ est le plus petit des majorants de X : ainsi $\max X = \sup X$.

I.18. proposition *Soit X et X' deux sous-ensembles non vides de E tels que $X \subset X'$. Si $\inf X$ et $\inf X'$ existent alors $\inf X' \leq \inf X$. Si $\sup X$ et $\sup X'$ existent alors $\sup X \leq \sup X'$.*

I.19. preuve On suppose que $\inf X$ et $\inf X'$ existent. Puisque $\inf X'$ est un minorant de X' c'est aussi un minorant de X. Il est donc inférieur ou égal à $\inf X$ qui est le plus grand des minorants de X.

De même, on suppose que $\sup X$ et $\sup X'$ existent. Puisque $\sup X'$ est un majorant de X' c'est aussi un majorant de X. Il est donc supérieur ou égal à $\sup X$ qui est le plus petits des majorants de X.

I.20. proposition *Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ une suite. Alors si $n \in \mathbf{N}$ l'ensemble $U_n = \{u_k : k \in \mathbf{N}, k \leq n\}$ admet un élément minimal et un élément maximal. Plus précisément il existe $m_n,\ M_n \in \mathbf{N}$, $m_n, M_n \leq n$ tels que*

$$u_{m_n} = \min U_n \text{ et } u_{M_n} = \max E_n.$$

Ainsi pour $n, k \in \mathbf{N}$ tels que $k \leq n$ on a $u_{m_n} \leq u_k \leq u_{M_n}$.

I.21. preuve On raisonne par récurrence sur n. On a $U_0 = \{u_0\}$ donc $m_0 = M_0 = 0$ et $\min U_0 = \max U_0 = u_0$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que U_n admet un élément minimal et un élément maximal et que m_n et M_n existent. Si $u_{n+1} < u_{m_n}$ alors u_{n+1} est un élément minimal de U_{n+1} et m_{n+1} existe (prendre $m_{n+1} = n+1$). Si $u_{m_n} \leq u_{n+1}$ alors u_{m_n} est un élément minimal de U_{n+1} et m_{n+1} existe (prendre $m_{n+1} = m_n$). De même, si $u_{M_n} < u_{n+1}$ alors u_{n+1} est un élément maximal de U_{n+1} et M_{n+1} existe (prendre $M_{n+1} = n+1$). Si $u_{n+1} \leq u_{M_n}$ alors u_{M_n} est un élément maximal de U_{n+1} et M_{n+1} existe (prendre $M_{n+1} = M_n$).

I.22. proposition *Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ une suite. La suite $(\min U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante et la suite $(\max U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante.*

I.23. preuve Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $U_n \subset U_{n+1}$. Par conséquent $\min U_{n+1}$ est un minorant de U_n et donc $\min U_{n+1} \leq \min U_n$. On a aussi $\max U_{n+1}$ est un majorant de U_n et donc $\max U_n \leq \max U_{n+1}$. Ainsi la suite $(\min U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante et la suite $(\max U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante.

I.24. définition Une fonction ou une suite à valeurs dans un ensemble muni d'une relation d'ordre est dite *minorée* (respectivement *majorée* ou *bornée*) si son ensemble image est *minoré* (respectivement *majoré* ou *borné*).

II. Corps commutatif totalement ordonné et inégalité triangulaire

II.1. notation Si $\mathbf{A}$ est un anneau commutatif, la loi de groupe est notée $+$, son neutre est noté 0, la seconde loi est notée $\times$ et son neutre 1.

II.2. définition Un corps commutatif $(\mathbf{K}, +, \times)$ muni d'une relation d'ordre total $\leq$ compatible avec l'addition et avec la multiplication par les éléments supérieurs ou égaux à 0 est appelé *corps commutatif totalement ordonné*.

Dans la suite de cette partie on considère corps commutatif totalement ordonné $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$.

II.3. notations On désigne par $\mathbf{K}_+$ l'ensemble des éléments *positifs ou nuls* (i.e. supérieurs ou égaux à 0) et par $\mathbf{K}_+^*$ l'ensemble des éléments *strictement positifs* (i.e. strictement supérieurs à 0). On désigne par $\mathbf{K}_-$ l'ensemble des éléments *négatifs ou nuls* (ceux dont l'inverse pour l'addition est dans $\mathbf{K}_+$) et par $\mathbf{K}_-^*$ l'ensemble des éléments strictement négatifs. Enfin on désigne par $\mathbf{K}^*$ l'ensemble des éléments non nuls.

II.4. exemple L'ensemble $\mathbf{Q}$ des rationnels muni de l'addition, de la multiplication et de l'ordre usuel est un exemple d'un corps commutatif totalement ordonné.

II.5. lemme *Si $r \in \mathbf{K}_-$ et $s \in \mathbf{K}_+$ alors $r \leq 0 \leq s$.*

II.6. preuve Puisque $s \in \mathbf{K}_+$ et $-r \in \mathbf{K}_+$, par définition de l'ordre sur $\mathbf{K}$ on a $0 \leq s$ et $0 \leq -r$. Puisque l'ordre est compatible avec l'addition on a

$$r = 0 + (-r) \leq r + (-r) = 0.$$

II.7. lemme *Soit $r, s \in \mathbf{K}$. Si $r \leq s$ alors $-s \leq -r$.*

II.8. preuve En effet, puisque $\leq$ est compatible avec $+$ on a

$$-s = -(r+s) + r \leq -(r+s) + s = -r.$$

II.9. lemme *Soit $r, s \in \mathbf{K}$. Si $r, s \in \mathbf{K}_+$ alors $s \times r = r \times s \in \mathbf{K}_+$ et si $r \in \mathbf{K}_-$ et $s \in \mathbf{K}_+$ alors $s \times r = r \times s \in \mathbf{K}_-$.*

II.10. preuve Puisque la multiplication est commutative et que l'ordre est compatible avec la mutiplication par des éléments positifs si $0 \leq r$ et $0 \leq s$ alors $0 = 0 \times s \leq r \times s = s \times r$ et si $r \leq 0$ et $0 \leq s$ alors $s \times r = r \times s \leq 0 \times s = 0$.

II.11. lemme *Si $r \in \mathbf{K}^*$ alors r et $-r$ sont de signes opposés alors que r et $\frac{1}{r}$ sont de même signe.*

II.12. preuve Si $r < 0$ alors $0 = r + (-r) < 0 + (-r) = -r$ et si $0 < r$ alors $-r = 0 + (-r) < r + (-r) = 0$. Si r et $\frac{1}{r}$ étaient de signes opposés alors leur produit qui vaut 1 est qui est strictement positif serait aussi négatif ou nul. C'est impossible donc r et $\frac{1}{r}$ sont de même signe.

II.13. définition Si $r \in \mathbf{K}$ on note $|r|$ et on appelle *valeur absolue de* r le plus grand des éléments r et $-r$.

II.14. remarque Si $r \in \mathbf{K}_+$ alors $|r| = r$ alors que si $r \in \mathbf{K}_-$ $|r| = -r$.

II.15. proposition *Soit* $r \in \mathbf{K}$ *et* $s \in \mathbf{K}_+$. *On a* $|r| \leq s$ *si et seulement si* $-s \leq r \leq s$.

II.16. preuve Par définition $r \leq |r|$ et $-r \leq |r|$. La deuxième inégalité est équivalente à $-|r| \leq r$. On a donc $-|r| \leq r \leq |r|$.

Si $|r| \leq s$ alors $-s \leq -|r|$ et par transitivité $-s \leq r \leq s$. Inversement si $-s \leq r \leq s$ alors $r \leq s$ et $-r \leq s$. Or $|r| \in \{-r, r\}$ donc $|r| \leq s$.

II.17. proposition *Si* $r, s, t \in \mathbf{K}$ *alors on a :*
1 - $|-r| = |r|$
2 - $|r| \in \mathbf{K}_+$
3 - $|r| = 0$ *si et seulement si* $r = 0$
4 - $|r| - |s| \leq |r + s| \leq |r| + |s|$
5 - $|r + s| = |r| + |s|$ *si et seulement si* r *et* s *sont de même signe*
6 - $|r - t| \leq |r - s| + |s - t|$
7 - $|r - t| = |r - s| + |s - t|$ *si et seulement si* $r \leq s \leq t$ *ou* $t \leq s \leq r$
8 - $|r \times s| = |r| \times |s|$.

II.18. preuve
1 - Si $r \in \mathbf{K}_+$ alors $|r| = r$ et $-r \in \mathbf{K}_-$ donc $|-r| = -(-r) = r = |r|$. Si $r \in \mathbf{K}_-$ alors $|r| = -r$ et $r \in \mathbf{K}_-$ donc $|-r| = -r = |r|$.
2 - Par définition de la valeur absolue $|r| \in \mathbf{K}_+$.
3 - On a bien $|0| = 0$. De plus si $r \neq 0$ alors $-r \neq 0$ donc $|r| \neq 0$.
4 - On a

$$-|r| \leq r \leq |r|$$

et

$$-|s| \leq s \leq |s|.$$

Puisque l'ordre respecte l'addition on obtient

$$-(|r| + |s|) \leq r + s \leq |r| + |s|$$

et donc
$$|r+s| \leq |r| + |s|.$$
En appliquant ce résultat à $(r+s)$ et $-s$ au lieu de r et s on obtient, puisque $r = (r+s) + (-s)$,
$$|r| \leq |r+s| + |s|$$
et donc
$$|r| - |s| \leq |r+s|.$$

5 - Si $0 \leq r, s$ alors $0 \leq r+s$. Ainsi $|r| = r$, $|s| = s$, $|r+s| = r+s$ donc $|r+s| = |r|+|s|$. Si $r, s \leq 0$ alors $r+s \leq 0$. Ainsi $|r| = r$, $|s| = s$, $|r+s| = r+s$ donc $|r+s| = |r| + |s|$.

Si r et s ne sont pas de même signe, quitte à les permuter on a $s < 0 < r$. Alors $s - r < s + r < r - s$ et $s - r < -(s+r) < r - s$ mais $|r| = r$, $|s| = -s$ et $|r+s|$ est égal à $s + r$ ou à $-(s+r)$. Par conséquent on a $|r+s| < r - s = |r| + |s|$.
6 - On obtient l'inégalité $|r-t| \leq |r-s| + |s-t|$ en remplaçant r et s par $r-s$ et $s-t$ dans l'inégalité $|r+s| \leq |r| + |s|$.
7 - D'apès 5 $|r-t| = |r-s| + |s-t|$ si et seulement si $r-s$ et $s-t$ sont de même signe c'est à dire si et seulement si $0 \leq r-s, s-t$ (i.e. $t \leq s \leq r$) ou $r-s, s-t \leq 0$ (i.e. $r \leq s \leq t$).
8 - Il suffit de remarquer que $(-r) \times (-s) = r \times s$ et $(-r) \times s = r \times (-s) = -(r \times s)$ et d'utiliser le fait que le produit de deux éléments de même signe est positif alors que le produit de deux éléments de signes opposés est négatif.

II.19. définition Soit $r, s \in \mathbf{K}$. On pose

$$\begin{array}{lcll}
[r,s] & = & \{x \in \mathbf{K} : r \leq x \leq s\} & \text{(segment ou intervalle fermé « rs »)} \\
[r,s[& = & \{x \in \mathbf{K} : r \leq x \leq s\} & \text{(intervalle fermé en } r \text{ et ouvert en } s) \\
]r,s] & = & \{x \in \mathbf{K} : r \leq x \leq s\} & \text{(intervalle ouvert en } r \text{ et fermé en } s) \\
]r,s[& = & \{x \in \mathbf{K} : r \leq x \leq s\} & \text{(intervalle ouvert « rs »)}\ .
\end{array}$$

II.20. proposition *L'intersection de deux intervalles est un intervalle. Si les deux intervalles sont ouverts (respectivement fermés) alors l'intersection est un intervalle ouvert (respectivement fermé). Plus précisément si* $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbf{K}$ *alors*

$$\begin{array}{rcl}
[r_1, s_1] \cap [r_2, s_2] & = & [\max\{r_1, r_2\}, \min\{s_1, s_2\}] \\
]r_1, s_1[\cap]r_2, s_2[& = &]\max\{r_1, r_2\}, \min\{s_1, s_2\}[.
\end{array}$$

II.21. preuve C'est une conséquence immédiate de la définition précédente et du fait que $\leq$ est une relation d'ordre total.

III. Plongement de Q dans un corps commutatif totalement ordonné

III.1. proposition *Soit* $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ *un corps commutatif totalement ordonné. Il existe une unique application* $\mathbf{i}$ *de* $\mathbf{Q}$ *dans* $\mathbf{K}$ *qui vérifie* $\mathbf{i}(1) = 1$ *et si* $r, s \in \mathbf{Q}$ *alors*

$$\mathbf{i}(r + s) = \mathbf{i}(r) + \mathbf{i}(s).$$

Cette application appelée plongement de $\mathbf{Q}$ *dans* $\mathbf{K}$ *est injective, respecte l'ordre et vérifie*

$$\mathbf{i}(r \times s) = \mathbf{i}(r) \times \mathbf{i}(s) \text{ si } r, s \in \mathbf{Q}.$$

III.2. preuve

étape 1. Soit $x \in \mathbf{K}^*$. On note τ l'application de de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{K}$ définie par $\tau(r) = r + x$. Soit u la suite récurrente de premier terme 0 associé à τ. On a $u_0 = 0$ et $u_1 = x$. On a $u_n = nx$ si $n \in \mathbf{N}$.

La suite u est strictement monotone donc injective car pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n < u_{n+1}$ si $0 < x$ et $u_{n+1} < u_n$ si $x < 0$. En particulier $u_n = 0$ si et seulement si $n = 0$. C'est à dire $nx = 0$ si et seulement si $n = 0$.

On prolonge la suite à $\mathbf{Z}$ en posant $u_{-n} = -u_n$ si $n \in \mathbf{N}^*$.

étape 2. Montrons que si $n, m \in \mathbf{Z}$ alors $u_{n+m} = u_n + u_m$.

On le montre d'abord si $n, m \in \mathbf{N}$. Fixons $n \in \mathbf{N}$. Soit

$$E = \{m \in \mathbf{N} : u_{n+m} = u_n + u_m\}.$$

Puisque $u_0 = 0$ on a $0 \in E$ et si $m \in E$ alors $u_{n+m} = u_n + u_m$, $u_{m+1} = u_m + x$ et $u_{(n+m)+1} = u_{(n+m)} + x$. Par conséquent

$$u_{n+(m+1)} = u_{(n+m)+1} = u_{n+m} + x = (u_n + u_m) + x = u_n + (u_m + x) = u_n + u_{m+1}$$

et donc $m + 1 \in E$. Ceci prouve par récurrence que $E = \mathbf{N}$ et que pour $n, m \in \mathbf{N}$ on a $u_{n+m} = u_n + u_m$.

Puisque $u_{-n} = -u_n$ si $n \in \mathbf{N}$ on en déduit que $u_{(-n)+(-m)} = u_{-n} + u_{-m}$ si $n, m \in \mathbf{N}$.

Il reste à considérer le cas $u_{n+(-m)}$ avec $n, m \in \mathbf{N}$. Si $m \leq n$ alors $n + (-m) \in \mathbf{N}$ et on a $u_n = u_{n+(-m)} + u_m$ car $n = (n - m) + m$. On en déduit que

$$u_{n+(-m)} = u_n + (-u_m) = u_n + u_{-m}.$$

Si $n \leq m$ alors $= m - n \in \mathbf{N}$ et on a $u_m = u_{m+(-n)} + u_n$ car $m = (m-n)+m$. On en déduit que

$$u_{n+(-m)} = -u_{m+(-n)} = u_n - u_m = u_n + u_{-m}.$$

étape 3. Montrons que l'application u de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{K}$ ainsi définie est injective. Soit $n, m \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leq m$. Soit alors $k \in \mathbf{N}$ tel que $m = n + k$. On a $u_m = u_n + u_k$. Si $u_m = u_n$ alors $u_k = 0$ donc $k = 0$ et $m = n$.

Dans la suite on suppose que $x = 1$. On a donc $u_{n+1} = u_n + 1$ si $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 < u_n$.

étape 4. Montrons que si $n, m \in \mathbf{Z}$ alors $u_{n\times m} = u_n \times u_m$.

Fixons $n \in \mathbf{N}$. Soit

$$E = \{m \in \mathbf{N} : u_{n\times m} = u_n \times u_m\}.$$

Puisque $u_0 = 0$ on a $0 \in E$ et si $m \in E$ alors $u_{n\times m} = u_n \times u_m$, $u_{m+1} = u_m + 1$ et

$$u_{n\times(m+1)} = u_{(n\times m)+n} = u_{n\times m} + u_n = u_n \times u_m + u_n = u_n \times (u_m + 1) = u_n \times u_{m+1}$$

et donc $m + 1 \in E$. Ceci prouve par récurrence que $E = \mathbf{N}$ et que pour $n, m \in \mathbf{N}$ on a $u_{n\times m} = u_n \times u_m$.

Puisque $u_{-n} = -u_n$ si $n \in \mathbf{N}$ et que $(-1) \times (-1) = 1$ on en déduit que $u_{-n} \times u_{-m} = u_n \times u_m$. Par conséquent

$$u_{(-n)\times(-m)} = u_{n\times m} = u_n \times u_m = u_{-n} \times u_{-m}$$

si $n, m \in \mathbf{N}$.

Il reste à considérer le cas $u_{n\times(-m)}$ avec $n, m \in \mathbf{N}$. On a

$$u_{n\times(-m)} = u_{-(n\times m)} = -u_{n\times m} = -(u_n \times_m) = u_n \times (-u_m) = u_n \times u_{-m}.$$

étape 5. Soit $r \in \mathbf{Q}$. Considérons $(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ et $(m', n') \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ tels que

$$r = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}.$$

Puisque $n \times m' = n' \times m$ on a $u_n \times u_{m'} = u_{n'} \times u_m$. Or n et n' sont non nuls donc u_n et $u_{n'}$ sont également non nuls. Ainsi $\frac{u_m}{u_n}$ et $\frac{u_{n'}}{u_{m'}}$ sont bien définis et

$$\frac{u_m}{u_n} = \frac{u_{n'}}{u_{m'}}.$$

Puisque pour tout rationnel $r \in \mathbf{Q}$ le quotient $\dfrac{u_m}{u_n}$ ne dépend pas du représentant $\dfrac{m}{n}$ choisi, on définit donc une application $\mathbf{i}$ de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{K}$ en posant $\mathbf{i}(r) = \dfrac{u_m}{u_n}$ si $r \in \mathbf{Q}$ et $(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ est tel que $r = \dfrac{m}{n}$.

étape 6. Soit $r, s \in \mathbf{Q}$ et soit $(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ et $(m', n') \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ tels que

$$r = \frac{m}{n},\ \ s = \frac{m'}{n'}.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} (r+s) & = & \frac{mn'+m'n}{nn'} \\ r \times s & = & \frac{mm'}{nn'} \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{i}(r+s) & = & \mathbf{i}(\frac{mn'+m'n}{nn'}) \\ & = & \frac{u_{mn'+m'n}}{u_{nn'}} \\ & = & \frac{u_m u_{n'}+u_{m'}u_n}{u_n u_{n'}} \\ & = & \frac{u_m}{u_n} + \frac{u_{m'}}{u_{n'}} \\ & = & \mathbf{i}(r) + \mathbf{i}(s). \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{i}(r \times s) & = & \mathbf{i}(\frac{mm'}{nn'}) \\ & = & \frac{u_{mm'}}{u_{nn'}} \\ & = & \frac{u_m \times u_{m'}}{u_n \times u_{n'}} \\ & = & \frac{u_m}{u_n} \times \frac{u_{m'}}{u_{n'}} \\ & = & \mathbf{i}(r) \times \mathbf{i}(s). \end{array}$$

étape 7. Montrons que $\mathbf{i}$ est injective et strictement croissante. Soit $r, s \in \mathbf{Q}$ tels que $r < s$. Il existe $(m, n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ tel que

$$s - r = \frac{m}{n}.$$

On a

$$\mathbf{i}(s) - \mathbf{i}(r) = \mathbf{i}(\frac{m}{n}) = \frac{u_m}{u_n}.$$

Puisque $0 < u_m$ et $0 < u_n$ on a

$$0 < \frac{u_m}{u_n} = \mathbf{i}(s) - \mathbf{i}(r)$$

et donc

$$\mathbf{i}(r) < \mathbf{i}(s).$$

Ceci implique que i est bien injective et strictement croissante.

étape 8. Montrons que si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{K}$ alors $\mathbf{i}(n) \times x = nx$.
C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. L'ensemble

$$E = \{n \in \mathbf{N} : nx = \mathbf{i}(n) \times x\}$$

est non vide et si $n \in E$ alors

$$(n+1)x = nx + x = \mathbf{i}(n) \times x + \mathbf{i}(1) \times x = \mathbf{i}(n+1) \times x$$

donc $(n+1) \in E$. Ceci prouve le résultat par un raisonnement par récurrence.

étape 9. Soit $y \in \mathbf{K}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. D'après l'étape 8 l'équation $nz = y$ est équivalente à l'équation $\mathbf{i}(n)z = y$. Elle admet au moins une solution, $\mathbf{i}(\frac{1}{n}) \times y = \frac{1}{\mathbf{i}(n)} \times y$. Montrons que c'est la seule solution. Soit z et z' dans $\mathbf{K}$ vérifiant $nz = nz' = y$. On a alors $nx = 0$ avec $x = z - z'$. Puisque $n \neq 0$ ceci signifie que $x = 0$ et $z = z'$.

étape 10. Montrons que $\mathbf{i}$ est unique. On considère une application $\mathbf{j}$ qui vérifie $\mathbf{j}(1) = 1$ et si $r, s \in \mathbf{Q}$ alors

$$\mathbf{j}(r+s) = \mathbf{j}(r) + \mathbf{j}(s).$$

- On a $\mathbf{j}(0) = \mathbf{j}(0+0) = \mathbf{j}(0) + \mathbf{j}(0)$ donc $\mathbf{j}(0) = 0$.
- Si $r \in \mathbf{Q}$ on a $\mathbf{j}(r)+\mathbf{j}(-r) = \mathbf{j}(r+(-r)) = \mathbf{j}(0) = 0$ donc $\mathbf{j}(r) = -\mathbf{j}(-r)$. En particulier $\mathbf{j}(-1) = -\mathbf{j}(1) = -1$.
- Soit $r \in \mathbf{Q}$ et $n \in \mathbf{N}$. Montrons que $\mathbf{j}(nr) = n\mathbf{j}(r)$. C'est vrai si $n = 0$. Par conséquent l'ensemble

  $$E = \{n \in \mathbf{N} : \mathbf{j}(nr) = n\mathbf{j}(r)\}$$

  contient 0 et si $n \in E$ alors

  $$\mathbf{j}((n+1)r) = \mathbf{j}(nr + r) = \mathbf{j}(nr) + \mathbf{j}(r) = n\mathbf{j}(r) + \mathbf{j}(r) = (n+1)\mathbf{j}(r)$$

  et donc $(n+1) \in E$. Ceci montre par récurrence que $E = \mathbf{N}$ et que si $n \in \mathbf{N}$ alors $\mathbf{j}(nr) = n\mathbf{j}(r)$.

Ces résultats sont valables en particulier pour $\mathbf{i}$.

– Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$1 = \mathbf{j}(1) = \mathbf{j}(n\frac{1}{n}) = n\mathbf{j}(\frac{1}{n})$$

et

$$1 = \mathbf{i}(1) = \mathbf{i}(n\frac{1}{n}) = n\mathbf{i}(\frac{1}{n}).$$

Par conséquent

$$n\mathbf{j}(\frac{1}{n}) = 1 = n\mathbf{i}(\frac{1}{n})$$

et donc

$$\mathbf{j}(\frac{1}{n}) = \mathbf{i}(\frac{1}{n}).$$

– Soit $r = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}^*$. Si $m \in \mathbf{Q}_+$ alors

$$\mathbf{j}(r) = \mathbf{j}(\frac{m}{n}) = \mathbf{j}(m\frac{1}{n}) = m\mathbf{j}(\frac{1}{n}) = m\mathbf{i}(\frac{1}{n}) = \mathbf{i}(m\frac{1}{n}) = \mathbf{i}(\frac{m}{n}) = \mathbf{i}(r).$$

Si $m \in \mathbf{Q}_-$ alors

$$\mathbf{j}(r) = -\mathbf{j}(-r) = -\mathbf{j}(\frac{-m}{n}) = -\mathbf{i}(\frac{-m}{n}) = -\mathbf{i}(-r) = \mathbf{i}(r).$$

III.3. convention En raison de l'existence et de l'unicité de $\mathbf{i}$ on identifie $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$ à des sous-parties de $\mathbf{K}$.

III.4. notation Si $n \in \mathbf{N}^*$ et $y \in \mathbf{K}$ alors on a prouvé (étape 9 de la preuve de la proposition précédente) que l'équation $nx = y$ admet une et une seule solution qu'on note $\frac{y}{n}$ ou $\frac{1}{n}y$.

IV. Propriété d'Archimède, partie entière, le cas de Q

IV.1. définition Un *corps archimédien* est un corps commutatif totalement ordonné $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ qui *vérifie la propriété d'Archimède* : pour tout si $x \in \mathbf{K}$ et pour tout $y \in \mathbf{K}_+^*$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $x \leq Ny$.

IV.2. proposition *Soit* $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ *un corps commutatif totalement ordonné. Si* $\mathbf{K}$ *n'est pas archimédien il existe* $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ *tel que pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *on a* $0 < \varepsilon < \frac{1}{n+1}$.

IV.3. preuve Puisque $\mathbf{K}$ est supposé non archimédien, il existe $x \in \mathbf{K}$ et $y \in \mathbf{K}_+^*$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $ny < x$. En particulier $y < x$ et donc

$x \in \mathbf{K}_+^*$. On pose $\varepsilon = \frac{y}{x}$. On a $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ et $n\varepsilon < 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On a donc $(n+1)\varepsilon < 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ainsi $\varepsilon < \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

IV.4. proposition *Soit $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ un corps commutatif totalement ordonné. Si $\mathbf{K}$ n'est pas archimédien il existe $K \in \mathbf{K}_+^*$ tel que pour tout $z \in \mathbf{Z}$ on a $z < K$.*

IV.5. preuve Il suffit de prendre $K = \frac{1}{\varepsilon}$ avec ε donné par la proposition précédente.

IV.6. proposition *Soit $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ un corps archimédien. Si $x \in \mathbf{K}$ il existe un unique $z \in \mathbf{Z}$ tel que $z \leq x < z+1$.*

IV.7. preuve Puisque $\mathbf{K}$ est archimédien il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $|x|+1 \leq N$. On a donc

$$-N < x < N.$$

Soit

$$E = \{n \in \mathbf{N} : -N + n \leq z\}.$$

L'ensemble E est non vide car il contient 0. L'entier naturel $2N$ n'appartient à E car $x < N = -N + 2N$. De plus si $n \in \mathbf{N}$ et $2N \leq n$ alors par transitivité $x < n$ et donc $n \notin E$. Ainsi $2N$ est un majorant de E et E est un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ non vide et majoré. Il possède donc un plus grand élément n_0. On a $n_0 \in E$ et, puisque c'est un majorant, $(n_0+1) \notin E$. On a donc $-N + n_0 \leq r$ mais $x < -N + (n_0+1)$. On pose $z = -N + n_0$. On a bien $z \in \mathbf{Z}$ et $z \leq x < z+1$.

Considérons $z' \in \mathbf{Z}$. Si $z' < z$ alors $z'+1 \leq z$ donc $z'+1 \leq x$. Si $z < z'$ alors $z+1 \leq z'$ donc $x < z'$. Par contraposée si $z' \leq x < z'+1$ alors $z \leq z'$ et $z' \leq z$ donc $z = z'$.

IV.8. remarque La propriété d'Archimède est essentielle pour prouver l'existence de partie entière. En effet d'après la remarque précédente si le corps $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné mais non archimédien il existe $x \in \mathbf{K}$ (prendre pour x le $K \in \mathbf{K}_+^*$ de la remarque) tel que pour tout $z \in \mathbf{Z}$ on a $z < z+1 < x$.

IV.9. définition Soit $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ un corps archimédien. Si $x \in \mathbf{K}$ l'unique $z \in \mathbf{K}$ tel que $z \leq x < z+1$ est appelé partie entière de x.

IV.10. proposition *Le corps $\mathbf{Q}$ est archimédien.*

IV.11. preuve Soit $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ et $(n, m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$ et $s = \frac{n}{m}$. Puisque $q, n \in \mathbf{N}^*$ on a $q \geq 1$ et $n \geq 1$ donc $qn \geq 1$ et $qn - 1 \geq 0$.

On pose $|p|m = N$. Alors

$$\begin{aligned} Ns - r &= \frac{|p|qn - p}{q} \\ &\geq \frac{|p|qn - |p|}{q} \qquad \text{(car } |p| \geq p) \\ &\geq \frac{|p|}{q}(qn-1) \\ &\geq 0 \qquad \text{(car } qn - 1 \geq 0) \end{aligned}$$

donc $r \leq Ns$.

IV.12. définition Soit $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ un corps commutatif totalement ordonné. Un sous-ensemble X de $\mathbf{K}$ est *dense* si pour $y, z \in \mathbf{K}$ quelconques tels que $y < z$ il existe $x \in X$ tel que $y < x < z$.

IV.13. proposition *Soit* $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ *un corps commutatif totalement ordonné. Il est archimédien si et seulement si* $\mathbf{Q}$ *est dense.*

IV.14. preuve On suppose que $\mathbf{K}$ est archimédien. La partie entière est donc bien définie. Soit $y, z \in \mathbf{K}$ tels que $y < z$. Soit q la partie entière de $\frac{1}{2(z-y)}$. C'est l'entier naturel tel que $q \leq \frac{1}{(z-y)} < q+1$. On a donc $0 < \frac{1}{q+1} < z - y$ et $y < y + \frac{1}{q+1} < z$. Soit p la partie entière de $(q+1)y$. C'est l'entier relatif tel que $p \leq (q+1)y < p+1$. On a donc $\frac{p}{q+1} \leq y < \frac{p+1}{q+1} = \frac{p}{q+1} + \frac{1}{q+1} \leq y + \frac{1}{q+1} < z$. Ainsi le rationnel $r = \frac{p+1}{q+1}$ vérifie $y < r < z$.

On suppose que $\mathbf{K}$ est archimédien. Il existe alors $K \in \mathbf{K}$ strictement supérieur à tout entier. Soit r un rationnel et n sa partie entière. On a $n \leq r < n+1 < K < K+1$. Ceci montre que tout $x \in \mathbf{K}$ tel que $K < x < K+1$ n'est pas rationnel. L'ensemble $\mathbf{Q}$ n'est pas dense dans $\mathbf{K}$.

IV.15. définition Soit $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ un corps commutatif totalement ordonné. On dit qu'*il possède la propriété de la borne supérieure* si tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbf{K}$ possède une borne supérieure. On dit qu'*il possède la propriété de la borne inférieure* si tout sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbf{K}$ possède une borne inférieure.

IV.16. proposition *Soit* $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ *un corps commutatif totalement ordonné. Il possède la propriété de la borne supérieure si et seulement si il possède la propriété de la borne inférieure.*

IV.17. preuve Il suffit d'observer que si S est la borne supérieure d'un sous-ensemble X de $\mathbf{K}$ alors $-S$ est la borne inférieure du sous-ensemble

$$-X = \{-x : x \in X\}$$

et si I est la borne inférieure d'un sous-ensemble Y de $\mathbf{K}$ alors $-I$ est la borne supérieure du sous-ensemble

$$-Y = \{-y : y \in Y\}.$$

IV.18. proposition *Soit* $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ *un corps commutatif totalement ordonné. S'il possède la propriété de la borne supérieure alors il est archimédien.*

IV.19. preuve Soit $x \in \mathbf{K}$ et $y \in \mathbf{K}^*$. Si $x \leq 0$ alors $x \leq ny$ pour tout entier naturel n. Supposons $x > 0$. L'ensemble X des my tels que $m \in \mathbf{N}$ et $my < x$ est non vide car il contient 0 et il est majoré par x. Il admet une borne supérieure S. Si $X = \{my | m \in \mathbf{N}\}$ alors pour tout entier naturel m on aurait $my \leq S$ mais aussi $(m+1)y \leq S$. Ceci impliquerait que $S - y$ qui est strictement plus petit que S car $y > 0$ serait un majorant de X. Ceci contredirait le fait que S soit la borne supérieure de X. Par conséquent il existe un entier naturel N tel $Ny \in \mathbf{K} \setminus X$. Il vérifie $x \leq Ny$. Ainsi $\mathbf{K}$ est archimédien.

IV.20. définition Soit $(u_n, v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite récurrente de premier terme $(1, 0)$ et associée à la fonction f de $\mathbf{N}^2$ définie par $f(m, n) = (m * (n + 1), n + 1)$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi définie s'appelle la *factorielle*. On note u_n par $n!$ et on dit « factorielle n ». On a $0! = 1! = 1$ et $(n + 1)! = n! \times (n + 1)$.

IV.21. proposition *Soit* $n \in \mathbf{N}$. *Alors* $n! > 0$ *et si* $k \in \mathbf{N}$ *est tel que* $0 < k \leq n$ *alors, il existe* $l \in \mathbf{N}$ *tel que* $kl = n!$.

IV.22. preuve Si $n \in \mathbf{N}$ on note P_n la propriété « $n! > 0$ et si $k \in \mathbf{N}$ est tel que $0 < k \leq n$ alors, il existe $l \in \mathbf{N}$ tel que $kl = n!$ ».

Les propriétés P_0 et P_1 sont vraies.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que P_n est vraie. Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $0 < k \leq n + 1$. Si $k \leq n$, d'après P_n il existe $l' \in \mathbf{N}$ tel que $kl' = n!$. On a alors $kl = (n + 1)!$ avec $l = l' \times (n + 1)$. De plus $(n + 1)! = n! \times l$ avec $l = n + 1$. Par conséquent si P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi.

On vient de prouver la proposition par récurrence.

IV.23. proposition *Le corps* $\mathbf{Q}$ *ne possède pas la propriété de la borne supérieure.*

IV.24. preuve Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ si $n \in \mathbf{N}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $y_n = x_n + \frac{1}{n}\frac{1}{n!}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrons que

$$x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n.$$

On a $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)!}$ et $y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{n+1}\frac{1}{(n+1)!}$ donc $x_n < x_{n+1}$ et $x_{n+1} < y_{n+1}$. On a $y_n - y_{n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n+1}\frac{1}{(n+1)!}$ donc

$$y_n - y_{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)(n+1)!}$$

et $y_{n+1} < y_n$.

Ainsi la suite x est strictement croissante, la suite y est strictement décroissante et tout terme de x est majoré par tout terme de y.

Montrons par récurrence que si $n \in \mathbf{N}$ alors $n! \times x_n \in \mathbf{N}$ (propriété P_n). La propriété P_0 est vraie. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose P_n vraie. On a $n!\times x_n \in \mathbf{N}$. Or

$$\begin{array}{rcl} (n+1)! \times x_{n+1} & = & (n+1)! \times (x_n + \frac{1}{(n+1)!} \\ & = & (n+1) \times (n! \times x_n) + 1 \end{array}$$

On a donc $(n+1)! \times x_{n+1} = (n+1) \times (n! \times x_n) + 1 \in \mathbf{N}$. Ceci prouve par récurrence que si $n \in \mathbf{N}$ alors $n! \times x_n \in \mathbf{N}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrons que

$$n! \times x_n < n! \times y_n < n! \times x_n + 1.$$

On a $y_n = x_n + \frac{1}{nn!}$. Par conséquent $n! \times y_n = n! \times x_n + \frac{1}{n}$ et donc $n! \times x_n < n! \times y_n < n! \times x_n + 1$.

On considère l'ensemble $X = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. C'est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{Q}$ et majoré strictement par tout élément y de $Y = \{y_n : n \in \mathbf{N}\}$.

Montrons par l'absurde que X ne possède pas de borne supérieure. On suppose donc X possède une borne supérieure $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ et on va chercher une contradiction. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $x_n < \frac{p}{q} < y_n$. Par conséquent

$$n! \times x_n < n! \times \frac{p}{q} < n! \times y_n \leq n! \times x_n + 1.$$

En prenant $n = q$ on obtient

$$q! \times x_q < (q-1)! \times p < q! \times y_q \leq q! \times x_q + 1$$

et donc
$$q! \times x_q < (q-1)! \times p < q! \times y_q \leq q! \times x_q + 1.$$
Or, puisque $(q-1)! \times p$ est un entier naturel, il ne peut être strictement compris entre les deux entiers naturels successifs $q! \times x_q$ et $q! \times x_q + 1$. On obtient une contradiction qui prouve que X n'a pas de borne supérieure bien qu'il soit majoré.

V. Opérations sur les suites dans un anneau commutatif

V.1. notation Soit $(\mathbf{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. L'ensemble des suites dans $\mathbf{A}$ est noté $\mathbf{A}^{\mathbf{N}}$.

V.2. notation Si $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{A}^{\mathbf{N}}$ on désigne par $(-u)$ ou $-u$ la suite $(-u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

V.3. notation On désigne par 0 la suite de termes tous égaux à 0 et par 1 la suite de termes tous égaux à 1.

V.4. proposition *L'ensemble $\mathbf{A}^{\mathbf{N}}$ muni des lois $+$ et $\times$ est un anneau commutatif. Le neutre pour $+$ est la suite constante égale à 0 et le neutre pour $\times$ est la suite constante égale à 1. L'inverse pour l'addition d'une suite est la suite de termes inverses pour l'addition dans $\mathbf{A}$.*

V.5. preuve Soit $u, v, w \in \mathbf{A}^{\mathbf{N}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ alors

$$\begin{aligned}
u_n + 0 = 0 + u_n &= u_n \\
u_n + (-u_n) &= 0 \\
u_n + v_n &= v_n + u_n \\
u_n + (v_n + w_n) &= (u_n + v_n) + w_n \\
u_n \times 1 &= 1 \times u_n \\
u_n \times v_n &= v_n \times u_n \\
u_n \times (v_n \times w_n) &= (u_n \times v_n) \times w_n \\
u_n \times (v_n + w_n) &= (u_n \times v_n) + (u_n \times w_n) \\
(u_n + v_n) \times w_n &= (u_n \times v_n) + (v_n \times w_n).
\end{aligned}$$

Par conséquent en passant aux suites on a bien

$$\begin{array}{ccll}
u+0=0+u & = & u & \text{(0 est neutre pour +)}\\
u+(-u) & = & 0 & \text{(l'opposé de } u \text{ est } -u)\\
u+v & = & v+u & \text{(commutativité de +)}\\
u+(v+w) & = & (u+v)+w & \text{(associativité de +)}\\
u\times 1 & = & 1\times u & \text{(1 est neutre pour } \times)\\
u\times v & = & v\times u & \text{(commutativité de } \times)\\
u\times(v\times w) & = & (u\times v)\times w & \text{(associativité de } \times)\\
u\times(v+w) & = & (u\times v)+(u\times w) & \text{(distributivité de } \times\\
(u+v)\times w & = & (u\times v)+(v\times w) & \quad \text{par rapport à +).}
\end{array}$$

V.6. convention Comme d'habitude on utilise les propriétés d'associativité et de commutativité de $+$ et $\times$ et on donne la priorité de $\times$ sur $+$ pour simplifier le parenthésage. Le symbole $\times$ et parfois omis. Ainsi le produit $u \times v$ peut être noté uv.

VI. Les suites convergentes dans un corps commutatif totalement ordonné

On considère $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ un corps commutatif totalement ordonné.

VI.1. définition Soit $l \in \mathbf{K}$. Une suite $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est dite *convergente de limite* l ou *converge vers* l si pour tout $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N on a $|u_n - l| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{K}_+^* \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \in \mathbf{N} \ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

VI.2. notation Si $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite convergente de limite l on pose

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l.$$

VI.3. proposition *Soit* $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ *et* $l, l' \in \mathbf{Q}$ *tels que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l'$. *Alors* $l = l'$.

VI.4. preuve Soit $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$. Soit alors N et N' deux entiers naturels tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a :
- si $n \geq N$ alors $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$,
- si $n \geq N'$ alors $|u_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Les entiers N et N' existent car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l'$ et $\frac{\varepsilon}{2} \in \varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$.

On note n_0 le plus grand des deux entiers naturels N et N'. On a $|u_{n_0}-l| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|u_{n_0} - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc $|u_{n_0} - l| + |u_{n_0} - l'| < \varepsilon$. Or d'après l'inégalité triangulaire $|l - l'| \leq |u_{n_0} - l| + |u_{n_0} - l'|$. Par conséquent $|l - l'| < \varepsilon$. Ainsi pour tout $\varepsilon \in \mathbf{Q}_+^*$ on a $|l - l'| < \varepsilon$. Ceci implique que $l = l'$.

VI.5. définition Une suite $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est dite *convergente* s'il existe $l \in \mathbf{K}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

VI.6. exemples Si $l \in \mathbf{K}$ alors la suite *constante* $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $u_n = l$ quelque soit $n \in \mathbf{N}$ est une suite convergente de limite l (pour tout $\varepsilon \in \mathbf{K}_+$ prendre $N = 0$).

Si le corps $\mathbf{K}$ est archimédien la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $u_n = \frac{1}{n+1}$ si $n \in \mathbf{N}$ est une suite convergente de limite 0 (utiliser le fait que $\mathbf{K}$ est archimédien et si $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ prendre pour N un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que $N\varepsilon \geq 2$). Si le corps $\mathbf{K}$ n'est pas archimédien alors il existe $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ tel que $\varepsilon < u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. La suite u n'est donc pas convergente.

VI.7. notation On note $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ l'ensemble des suites convergentes. Si $l \in \mathbf{K}$ on note $\mathcal{L}(\mathbf{K})_l$ l'ensemble des suites convergentes de limite l.

VI.8. proposition *La famille* $(\mathcal{L}(\mathbf{K})_l)_{l\in\mathbf{K}}$ *est une partition de* $\mathcal{L}(\mathbf{K})$.

VI.9. preuve On a vu que si $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K})$ alors il existe un unique $l \in \mathbf{K}$ tel que u converge vers l donc $\mathcal{L}(\mathbf{K})_l \cap \mathcal{L}(\mathbf{K})_{l'} = \emptyset$ si $l \neq l'$ et $\mathcal{L}(\mathbf{K}) = \cup_{l\in\mathbf{K}}\mathcal{L}(\mathbf{K})_l$.

VI.10. proposition *Soit* $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ *un corps commutatif totalement ordonné. On suppose que* $\mathbf{K}$ *est archimédien. Soit* $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ *une suite et soit* $l \in \mathbf{K}$. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
1 - pour tout $M \in \mathbf{N}$ *il existe un rang* $N \in \mathbf{N}$ *tel que pour tout entier naturel* n *supérieur ou égal à* N *on a* $|u_n - l| < \frac{1}{M+1}$
2 - pour tout $r \in \mathbf{Q}_+^*$ *il existe un rang* $N \in \mathbf{N}$ *tel que pour tout entier naturel* n *supérieur ou égal à* N *on a* $|u_n - l| < r$
3 - pour tout $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ *il existe un rang* $N \in \mathbf{N}$ *tel que pour tout entier naturel* n *supérieur ou égal à* N *on a* $|u_n - l| < \varepsilon$ *(*$u \in \mathcal{L}(\mathbf{K})_l$*).*

VI.11. preuve L'assertion 3 implique l'assertion 2 qui implique l'assertion 1 en raison des inclusions $\{\frac{1}{M+1} : M \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{Q}_+^* \subset \mathbf{K}_+^*$. Il reste à montrer que l'assertion 1 implique l'assertion 3. Soit $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$. Puisque $\mathbf{K}$ est archimédien et que $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbf{K}_+^*$ la partie entière M de $\frac{1}{\varepsilon}$ existe et c'est un entier naturel. On a $0 \leq M \leq \frac{1}{\varepsilon} < M + 1$ et donc $0 < \frac{1}{M+1} < \varepsilon$. Soit $N \in \mathbf{N}$ donné par l'assertion 1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N on a $|u_n - l| < \frac{1}{M+1}$.

Puisque $\frac{1}{M+1} < \varepsilon$, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N on a $|u_n - l| < \varepsilon$. L'assertion 3 est donc vérifiée dès que l'assertion 1 l'est.

VI.12. corollaire *Soit* $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ *un corps commutatif totalement ordonné. Si* $\mathbf{K}$ *est archimédien alors* $\mathcal{L}(\mathbf{Q}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{K}) \cap \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$. *De plus si* $l \in \mathbf{Q}$ *alors* $u \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ *appartient à* $\mathcal{L}(\mathbf{Q})_l$ *si et seulement si elle appartient à* $\mathcal{L}(\mathbf{K})_l$.

VI.13. preuve On a $\mathcal{L}(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ et $\mathbf{Q} \subset \mathbf{K}$ donc $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}} \subset \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Soit $l \in \mathbf{Q}$. D'après la proposition, pour tester si une suite appartenant à $Q^{\mathbf{N}}$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbf{K})_l$ il suffit de prendre les $\epsilon \in \mathbf{Q}_+^*$. Par conséquent toute suite $u \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ est dans $\mathcal{L}(\mathbf{Q})_l$ si et seulement si elle est dans $\mathcal{L}(\mathbf{K})_l$.

VI.14. proposition *Soit* $u, v \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ *deux suites convergentes de limites* l *et* l'. *On suppose qu'il existe* $N \in \mathbf{N}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *qui vérifie* $N \leq n$ *on a* $u_n \leq v_n$. *Alors* $l \leq l'$.

VI.15. preuve On raisonne par contraposée. On suppose que $l' < l$. On pose $\varepsilon = \frac{l-l'}{2}$. Puisque $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ il existe $M, M' \in \mathbf{N}$ tels que si $n \in \mathbf{N}$ alors

$$M \leq n \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

et

$$M' \leq n \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon.$$

On a donc

$$M \leq n \Rightarrow \frac{l + l'}{2} = l - \varepsilon < u_n$$

et

$$M' \leq n \Rightarrow v_n < l' + \varepsilon = \frac{l + l'}{2}.$$

Ainsi si M'' désigne le plus grand des deux entiers naturels M et M' alors pour tout entier naturel n supérieur ou égal à M' on a $v_n < \frac{l+l'}{2} < u_n$. Ceci contredit l'hypothèse « il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ qui vérifie $N \leq n$ on a $u_n \leq v_n$ ».

VI.16. corollaire *Soit* $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ *une suite convergente de limite* l *et soit* $x \in \mathbf{K}$. *On suppose qu'il existe* $N \in \mathbf{N}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *qui vérifie* $N \leq n$ *on a* $x \leq u_n$ *(respectivement* $u_n \leq x$.*) Alors* $x \leq l$ *(respectivement* $l \leq x$*).*

VI.17. preuve Il suffit d'appliquer la proposition précédente en prenant pour v la suite conctante égale à x.

VI.18. proposition *Une suite* $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ *est bornée si et seulement si il existe* $K \in \mathbf{K}_+^*$ *tel que pour tout* $n \in \mathbf{N}$ $|u_n| < K$.

VI.19. preuve S'il existe un tel K alors K est un majorant de la suite et $-K$ est un minorant. La suite est donc bornée. Réciproquement si la suite est majorée par M et minorée par m alors $K = |m| + |M|$ vérifie $-K \leq m \leq M \leq K$ par conséquent pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $|u_n| \leq K$.

VI.20. proposition *Si* $u, v \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ *sont bornées alors* $u + v$ *et* uv *le sont aussi.*

VI.21. preuve Puisque u et v sont bornées il existe $K, K' \in \mathbf{K}_+^*$ tels que pour tout entier naturel n on a $|u_n| \leq K$ et $|v_n| \leq K'$. Si on pose $K'' = K + K'$ et $K''' = K \times K'$ on a pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$|u_n + v_n| \leq K'' \text{ (inégalité triangulaire)}$$

et, puisque l'ordre respecte la multiplication par des éléments positifs,

$$|u_n \times v_n| = |u_n| \times |v_n| \leq K'''.$$

Par conséquent $u + v$ et uv sont bornées.

VI.22. proposition *Si* $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ *est minorée par* $K \in \mathbf{K}_+^*$ *alors pour tout* $n \in \mathbf{N}$ $u_n > 0$ *et la suite* $v \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ *définie par* $v_n = \frac{1}{u_n}$ *si* $n \in \mathbf{N}$ *est majorée par* $\frac{1}{K}$.

VI.23. preuve Soit $n \in \mathbf{N}$. De $0 < K \leq u_n$ il vient $0 < Ku_n$ puis $0 < \frac{1}{Ku_n}$. Par conséquent puisque l'ordre est compatibles avec la multiplication par des éléments positifs on déduit de $0 < K \leq u_n$ et des égalutés $0 = 0 \times \frac{1}{Ku_n}$, $\frac{1}{u_n} = K \times \frac{1}{Ku_n}$ et $\frac{1}{K} = u_n \times \frac{1}{Ku_n}$ que $0 < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{K}$.

VI.24. proposition *Toute suite convergente est bornée.*

VI.25. preuve Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite convergente de limite l. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $n \in \mathbf{N}$ est tel que $n \geq N$ alors $|u_n - l| < 1$. On a donc si $n \geq N$ $l - 1 < u_n < l + 1$. Soit $M_0 = \max\{u_n : n \leq N\}$ et $m_0 = \min\{u_n : n \leq N\}$. On pose $M = \max\{M_0 + 1, l + 1\}$ et $m = \min\{m_0 - 1, l - 1\}$. Si $n \in \mathbf{N}$ on a

$$m < u_n < M.$$

VI.26. proposition *Soient* $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *deux suites à valeurs dans* $\mathbf{K}$. *Si* u *est convergente de limite* 0 *et si* v *est bornée alors la suite* uv *est convergente de limite* 0.

VI.27. preuve Soit $K \in \mathbf{K}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $|v_n| < K$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$. On pose $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{K}$. Puisque $\varepsilon' \in \mathbf{K}_+^*$ et que u est convergente de limite 0 il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier naturel supérieur ou égal à N on a $|u_n| < \varepsilon'$. Par conséquent pour tout entier naturel supérieur ou égal à N on a $|u_n v_n| < \varepsilon' \times K = \varepsilon$. Ceci montre que la suite uv est convergente de limite 0.

VI.28. proposition *L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ est non-vide, il contient les suites 0 et 1, il est stable par $+$ et $\times$ et muni de ces lois c'est un anneau commutatif. De plus, si $u, v \in \mathcal{L}(\mathbf{K})$ sont des suites convergentes de limites r et s alors $u + v$ a pour limite $r + s$ et uv a pour limite rs.*

VI.29. preuve Soit $u, v \in \mathcal{L}(\mathbf{K})$ de limites r et s.

Montrons que $u + v$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ et a pour limite $r + s$.

Fixons $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$. Soit $N, N' \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$

- si $n \geq N$ alors $|u_n - r| < \frac{\varepsilon}{2}$,
- si $n \geq N'$ alors $|v_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Les entiers N et N' existent car $\lim_{n \to +\infty} u_n = r$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = s$ et $\frac{\varepsilon}{2} \in \varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$. On note n_0 le plus grand des deux entiers naturels N et N'. Si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $n \geq n_0$ on a $|u_n - r| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|v_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc $|u_n - r| + |v_n - s| < \varepsilon$. Or d'après l'inégalité triangulaire $|(u_n + v_n) - (r + s)| \leq |u_n - r| + |v_n - s|$. Par conséquent $|(u_n + v_n) - (r + s)| < \varepsilon$. Ceci prouve que la suite $u + v$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ et a pour limite $r + s$.

Montrons que uv appartient à $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ et a pour limite rs. Puisque la suite v est dans $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ elle est bornée. Il existe donc $K \in \mathbf{K}_+^*$ tels que $|r| < K$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ $|v_n| < K$.

Fixons $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$. Puisque $u, v \in \mathcal{L}(\mathbf{K})$ et que $\frac{\varepsilon}{2K} \in \mathbf{K}_+^*$, il existe $N, N' \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$

- si $n \geq N$ alors $|u_n - r| < \frac{\varepsilon}{2K}$,
- si $n \geq N'$ alors $|v_n - s| < \frac{\varepsilon}{2K}$.

On note n_0 le plus grand des deux entiers naturels N et N'. Observons maintenant que si $n \in \mathbf{N}$ on a

$$u_n v_n - rs = (u_n - r)v_n + r(v_n - s)$$

par conséquent

$$|u_n v_n - rs| \leq |u_n - r| \times |v_n| + |r| \times |v_n - s|.$$

Ainsi si $n \in \mathbf{N}$ est tel que $n_0 \leq n$ alors

$$|u_n v_n - rs| < \frac{\varepsilon}{2K} \times K + K \times \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.$$

Ceci prouve que la suite uv appartient à $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ et a pour limite rs.

VI.30. proposition *Soit* $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ *un corps archimédien. Pour tout* $x \in \mathbf{K}$ *il existe une suite* $r = (r_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ *de rationnels convergente dans* $\mathbf{K}$ *et de limite* x.

VI.31. preuve Si $n \in \mathbf{N}$ on note p_n la partie entière de $(n+1)x$ et on pose $r_n = \frac{p_n}{n+1}$. La suite $r = (r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi définie est une suite de rationnels. Montrons que cette suite est convergente dans $\mathbf{K}$ de limite x.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$. Considérons la partie entière N de $\frac{1}{\varepsilon}$. C'est un entier naturel car $\frac{1}{\varepsilon}$ est strictement positif. On a $0 < \frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $p_n \leq (n+1)x < p_n + 1$. Si on divise par $n+1$ qui est strictement postif et si ensuite on retranche r_n on obtient $0 \leq x - r_n < \frac{1}{n+1}$ et donc $|r_n - x| < \frac{1}{n+1}$. Par conséquent si $N \leq n$ alors $|r_n - x| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Ceci prouve que la suite r est convergente de limite x.

VI.32. remarque Si $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné qui n'est pas archimédien il posède des éléments qui ne sont pas limite de suite de rationnels. En effet il existe $K \in \mathbf{K}$ tel que $z < z+1 < K$ quelque soit l'entier relatif z. Par conséquent si $r = (r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de rationnels alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a, en notant z_n la partie entière de r_n, $z_n \leq r_n < z_n + 1 < z_n + 2 < K$ et donc $1 < |r_n - K|$. Aucune suite de rationnels ne tend vers K.

VII. Les suites de Cauchy dans un corps commutatif totalement ordonné

On considère $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ un corps commutatif totalement ordonné.

VII.1. définition Une suite $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est *une suite de Cauchy* si pour tout $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout couple (n, m) d'entiers naturels supérieurs ou égaux à N on a $|u_n - u_m| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{K}_+^* \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall n, m \in \mathbf{N} \ n, m \geq N \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon.$$

VII.2. proposition *Toute suite convergente est de Cauchy.*

VII.3. preuve Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K})$ et soit l la limite de u. Montrons que $u \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$. Puisque $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbf{K}_+^*$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, si $N \geq n$ alors $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, d'après l'inégalité triangulaire on a pour tout couple (n, m) d'entiers naturels supérieurs ou égaux à N

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - l| + |l - u_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$|u_n - u_m| < \varepsilon.$$

La suite u est bien de Cauchy.

VII.4. proposition *Toute suite de Cauchy est bornée.*

VII.5. preuve Soit $u \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$. Puisque $1 \in \mathbf{K}_+^*$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout tout couple (n, m) d'entiers naturels supérieurs ou égaux à N $|u_n - u_m| < 1$ et donc d'après l'inégalité triangulaire $|u_n| \leq |u_m| + 1$. On pose $K_0 = \max\{|u_n| : n \leq N\}$ et $K = K_0 + 2$. On a $K_0 < K_0 + 1 < K$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Si $n \leq N$ alors $|u_n| \leq K_0 < K$. Si $N \leq n$ alors $|u_n| \leq |u_N| + 1 \leq K_0 + 1 < K$. Ceci montre que la suite u est bien bornée.

VII.6. notation On note $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ l'ensemble des suites de Cauchy dans $\mathbf{K}$.

VII.7. proposition *L'ensemble* $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ *des suites de Cauchy dans* $\mathbf{K}$ *est non-vide, il contient* $\mathcal{L}(K)$, *il est stable par* $+$ *et* $\times$ *et muni de ces lois c'est un anneau commutatif.*

VII.8. preuve On a déjà vu que $\mathcal{L}(\mathbf{K}) \subset \mathcal{C}(\mathbf{K})$. En particulier il est non vide et il contient les suites constantes 0 et 1. Puisque $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ est inclus dans l'anneau commutatif $(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}, +, \times)$ pour montrer que c'est lui même un anneau commutatif, il suffit de montrer qu'il est stable par $+$ et $\times$.

Soit $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$.

Montrons que $u + v$ appartient à $\mathcal{C}(\mathbf{K})$.

Fixons $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$. Soit $N, N' \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n, m \in \mathbf{N}$

- si $n, m \geq N$ alors $|u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{2}$,
- si $n, m \geq N'$ alors $|v_n - v_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Les entiers N et N' existent car u et v sont de Cauchy et $\frac{\varepsilon}{2} \in \varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$. On note n_0 le plus grand des deux entiers naturels N et N'. Si $n, m \in \mathbf{N}$ vérifient $n, m \geq n_0$ on a $|u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|v_n - v_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc $|u_n - u_m| + |v_n - v_m| < \varepsilon$. Or d'après l'inégalité triangulaire $|(u_n + v_n) - (u_m + v_m)| \leq |u_n - u_m| + |v_n - v_m|$. Par conséquent $|(u_n + v_n) - (u_m + v_m)| < \varepsilon$. Ceci prouve que la suite $u + v$ appartient à $\mathcal{C}(\mathbf{K})$.

Montrons que uv appartient à $\mathcal{C}(\mathbf{K})$. Puisque les suites u et v sont dans $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ elle sont bornées. Il existe donc $K \in \mathbf{K}_+^*$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$ $|u_n|, |v_n| < K$.

Fixons $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$. Puisque $u, v \in \mathcal{L}(\mathbf{K})$ et que $\frac{\varepsilon}{2K} \in \mathbf{K}_+^*$, il existe $N, N' \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n, m \in \mathbf{N}$

- si $n, m \geq N$ alors $|u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{2K}$,
- si $n, m \geq N'$ alors $|v_n - v_m| < \frac{\varepsilon}{2K}$.

On note n_0 le plus grand des deux entiers naturels N et N'. Observons maintenant que si $n, m \in \mathbf{N}$ on a

$$u_n v_n - u_m v_m = (u_n - u_m)v_n + u_m(v_n - v_m)$$

par conséquent

$$|u_n v_n - u_m v_m| \leq |u_n - u_m| \times |v_n| + |u_m| \times |v_n - v_m|.$$

Ainsi si $n, m \in \mathbf{N}$ sont tels que $n_0 \leq n, m$ alors

$$|u_n v_n - u_m v_m| < \frac{\varepsilon}{2K} \times K + K \times \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.$$

Ceci prouve que la suite uv appartient à $\mathcal{C}(\mathbf{K})$.

VII.9. définition Soit $u \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$.
On dit que u est *asymptotiquement fortement strictement positive* s'il existe $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ et $N \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $N \leq n \Rightarrow u_n > \varepsilon$.
On dit que u est *asymptotiquement fortement strictement négative* s'il existe $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ et $N \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $N \leq n \Rightarrow u_n < -\varepsilon$.

VII.10. proposition *Soit $u \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$. La suite u vérifie l'une des trois conditions suivantes mutuellement exclusives :*
1 - u est une suite convergente de limite 0
2 - u est asymptotiquement fortement strictement positive
3 - u est asymptotiquement fortement strictement négative.

VII.11. preuve Soit $u \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$. On suppose que u n'est pas convergente de limite 0. Il existe donc $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ tel que pour tout $N \in \mathbf{N}$ in existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $N \leq n$ et $\varepsilon < |u_n|$. Puisque la suite u est de Cauchy et que $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbf{K}_+^*$, il existe $N' \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n, m \in \mathbf{N}$, si $N' \leq n, m$ alors $|u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ c'est à dire $-\frac{\varepsilon}{2} < u_n - u_m < \frac{\varepsilon}{2}$. D'après ce qui précède il existe $N'' \in \mathbf{N}$ tel que $N' \leq N''$ et $\varepsilon < |u_{N''}|$. On a donc $\varepsilon < u_{N''}$ ou $u_{N''} < -\varepsilon$. Par conséquent si $\varepsilon < u_{N''}$ alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $N' \leq n$ on a

$$\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} < u_{N''} + (u_n - u_{N''}) = u_n$$

c'est à dire

$$\frac{\varepsilon}{2} < u_n$$

et u est asymptotiquement fortement strictement positive. A contrario, si $u_{N''} < -\varepsilon$ alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $N' \leq n$ on a

$$u_n = u_{N''} + (u_n - u_{N''}) < -\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = -\frac{\varepsilon}{2}$$

c'est à dire

$$u_n < -\frac{\varepsilon}{2}$$

et u est asymptotiquement fortement strictement négative.

VII.12. proposition *Soit $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$:*
- u est asymptotiquement fortement strictement positive (respectivement négative) si et seulement si la suite $-u$ est asymptotiquement fortement strictement négative (respectivement positive)
- si u et v sont asymptotiquement fortement strictement positives alors $u+v$ et uv sont asymptotiquement fortement strictement positives
- si u est asymptotiquement fortement strictement positive et v convergente de limite 0 alors $u+v$ est asymptotiquement fortement strictement positive.

VII.13. preuve Le changement de signes entre u et $-u$ va de pair avec les changements de signes et d'inégalités entre les définitions de « asymptotiquement fortement strictement positive » et de « asymptotiquement fortement strictement négative ».

Si u et v sont asymptotiquement fortement strictement positives alors il existe $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbf{K}_+^*$ et $N, N' \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $N \leq n \Rightarrow u_n > \varepsilon$ et $N' \leq n \Rightarrow v_n > \varepsilon'$. Par conséquent si on note N'' le plus grand des entiers N et N' et si on note ε'' le plus petit des éléments $\varepsilon+\varepsilon'$ et $\varepsilon\varepsilon'$ alors on a $\varepsilon'' \in \mathbf{K}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $N'' \leq n \Rightarrow u_n + v_n > \varepsilon''$ et $N'' \leq n \Rightarrow u_n v_n > \varepsilon''$. Ainsi $u+v$ et uv sont asymptotiquement fortement strictement positives.

Si u est asymptotiquement fortement strictement positive alors il existe $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ et $N \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $N \leq n \Rightarrow u_n > \varepsilon$. Si de plus v est convergente de limite 0 alors, puisque $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbf{K}_+^*$, il existe $N' \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ supérieur ou égal à N' on a $|v_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ c'est à dire et $N' \leq n \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < v_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent si on note N'' le plus grand des entiers N et N' alors on pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N''

$$\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} < u_n + v_n$$

et donc $u+v$ est bien asymptotiquement fortement strictement positive car $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbf{K}_+^*$.

VII.14. proposition *Soit* $u \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$. *Si* u *est asymptotiquement fortement strictement positive alors il existe* $v \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$ *asymptotiquement fortement strictement positive telle que* uv *est une suite convergente de limite* 1.

VII.15. preuve Puisque $u \in \mathcal{C}$ u est bornée et il existe $K \in \mathbf{K}_+^*$ tel que $|u_n| < K$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Puisque u est asymptotiquement fortement strictement positive il existe $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ et $N \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $N \leq n \Rightarrow u_n > \varepsilon$. En particulier $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ supérieur ou égal à N. On note $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $v_n = 1$ si $n < N$ et $v_n = \frac{1}{u_n}$ si $N \leq n$. Soit $\varepsilon' \in \mathbf{K}_+^*$. Puisque u est de Cauchy et que $\varepsilon'\varepsilon^2 \in \mathbf{K}_+^*$ il existe $N' \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n, m \in \mathbf{N}$ supérieur ou égal à N' on a $|u_n - u_m| < \varepsilon'\varepsilon^2$. Par conséquent si $n \in \mathbf{N}$ est supérieur au maximum N'' des deux entiers naturels N et N' on a

$$|v_n - v_m| = \frac{|u_n - u_m|}{|u_n| \times |u_m|} < \frac{\varepsilon'\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = \varepsilon'$$

c'est à dire

$$|v_n - v_m| < \varepsilon'.$$

Ceci prouve que la suite v est de Cauchy. Elle est asymptotiquement fortement strictement positive car tout $n \in \mathbf{N}$, $N \leq n \Rightarrow v_n > \frac{1}{K}$ et $\frac{1}{K} \in \mathbf{K}_+^*$. Enfin la suite uv est convergente de limite 1 car pour tout $n \in \mathbf{N}$ supérieur ou égal à N on a $u_n v_n = 1$.

VII.16. corollaire *Soit* $u \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$. *Si* u *est asymptotiquement fortement strictement négative alors il existe* $v \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$ *asymptotiquement fortement strictement négative telle que* uv *est une suite convergente de limite* 1.

VII.17. preuve La proposition précédente appliquée à $-u$ qui est asymptotiquement fortement strictement positive donne $w \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$ asymptotiquement fortement strictement positive telle que $(-u)w$ est une suite convergente de limite 1. Par conséquent $v = -w \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$ est asymptotiquement fortement strictement positive et uv est une suite convergente de limite 1.

VII.18. proposition *Le corps* $\mathbf{K}$ *possède la propriété de la borne supérieure si et seulement si il est archimédien et* $\mathcal{C}(\mathbf{K}) = \mathcal{L}(\mathbf{K})$.

VII.19. preuve On suppose que $\mathbf{K}$ possède la propriété de la borne supérieure. On a déjà montré qu'il était alors archimédien. On considère $u \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$ et on va montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K})$.

Puisque $\mathbf{K}$ possède la propriété de la borne supérieure il possède donc aussi la propriété de la borne inférieure. Puisque u est de Cauchy elle est bornée. Par conséquent si $n \in \mathbf{N}$ l'ensemble $E_n = \{u_k : k \in \mathbf{N}, n \leq k\}$ est non vide et borné et puisque $\mathbf{K}$ possède la propriété de la borne inférieure, il existe $v_n, w_n \in \mathbf{K}$ tel que $v_n = \inf E_n$ et $w_n = \sup E_n$. On définit ainsi deux suites $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{K}$. Si $n \in \mathbf{N}$ alors $E_{n+1} \subset E_n \subset E_0$ et donc $v_n \leq v_{n+1} \leq w_0$. Ainsi la suite v est croissante et tout terme de v est majorée par w_0. Puisque l'ensemble $V = \{v_n : n \in \mathbf{N}\}$ est majoré par w_0, il possède une borne supérieure $l = \sup V$. Montrons que la suite u converge vers l.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$. Puisque u est de Cauchy et que $\frac{\varepsilon}{3} \in \mathbf{K}_+^*$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour $n, m \in \mathbf{N}$, si $N \leq n, m$ alors $|u_n - u_m| < \varepsilon 2$. Puisque $l = \sup\{v_n : n \in \mathbf{N}\}$ et que $l - \frac{\varepsilon}{3} < l$ il existe $N' \in \mathbf{N}$ tel que $l - \frac{\varepsilon}{3} < v_{N'} \leq l$. Puisque v est croissante et que $l = \sup\{v_n : n \in \mathbf{N}\}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $N' \leq n$ on a $l - \frac{\varepsilon}{3} < v_{N'} \leq v_n \leq l$ et en particulier $|v_n - l| < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit N'' le plus des entiers N et N'. On a $|v_{N''} - l| < \frac{\varepsilon}{3}$ et pour $n, m \in \mathbf{N}$ tels que $N'' \leq n, m$ on a $|u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{3}$. Or, puisque $V_{N''} = \inf\{u_k : k \in \mathbf{N}, N'' \leq k\}$ il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $N'' \leq m$ et $V_{N''} \leq u_m < V_{N''} + \frac{\varepsilon}{3}$ et en particulier $|u_m - v_{N''}| < \frac{\varepsilon}{3}$. Par conséquent si $n \in \mathbf{N}$ est tel que $N'' \leq n$ alors

$$|u_n - l| \leq |u_n - u_m| + |u_m - v_{N''}| + |v_{N''} - l| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

c'est à dire

$$|u_n - l| < \varepsilon.$$

Ceci prouve que la suite u converge vers l.

Réciproquement on suppose que $\mathbf{K}$ est archimédien et que $\mathcal{C}(\mathbf{K}) = \mathcal{L}(\mathbf{K})$. On considère un sous-ensemble X non vide et majoré de $\mathbf{K}$ et on va montrer que X possède une borne supérieure. Si X est un singleton c'est immédiat. On suppose donc qu'il existe au moins deux éléments $x < x'$ dans X. On pause $\tau = x' - x : \tau \in \mathbf{K}_+^*$. Soit M un majorant de X : on a $x < x' \leq M$. Si $n \in \mathbf{N}$ on note E_n l'ensemble des $k \in \mathbf{N}$ tel que $x + k\frac{\tau}{n+1}$ est un majorant de X. Puisque $\mathbf{K}$ est archimédien et que $\frac{\tau}{n+1} \in \mathbf{K}_+^*$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $M - x \leq N\frac{\tau}{n+1}$. Un tel N appartient à E_n. Ainsi E_n est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{N}$. Il possède un plus petit élément k_n. On pose $u_n = x + k_n\frac{\tau}{n+1}$. Par définition u_n est un majorant de X. En particulier $x < x' \leq u_n$ et donc $0 < k_n$. Puisque $k_n = \min E_n$ et que $0 < k_n$, $k_n - 1$ est un entier naturel qui n'est pas dans E_n et $v_n = x + (k_n - 1)\frac{\tau}{n+1}$ n'est pas un majorant de X.

Montrons que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$. Puisque $\mathbf{K}$ est archimédien il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que $\tau < (N+1)\varepsilon$. Soit $n, m \in \mathbf{N}$ tels que $N \leq n, m$. quitte à permuter n et m on a $u_n \leq u_m$. Puisque u_m est un majorant de X et que v_m n'en est pas un il existe $x'' \in X$ tel que $v_m < x'' \leq u_m$. Par conséquent $0 \leq u_m - x'' < u_m - v_m = \frac{\tau}{m+1} \leq \frac{\tau}{N+1} < \varepsilon$ et donc $|u_m - x''| < \varepsilon$. Pusque u_n est un majorant de X et que $u_n \leq u_m$ on a $x'' \leq u_n \leq u_m$ et donc $0 \leq u_m - u_n \leq u_m - x$ et donc $|u_m - u_n| \leq |u_m - x''|$. Ainsi, puisque $|u_m - x''| < \varepsilon$ il vient $|u_m - u_n| < \varepsilon$. Ceci prouve que la suite u est de Cauchy.

Puisque la suite u est de Cauchy, elle est convergente. Soit l sa limite. Montrons que $l = \sup X$. Soit $y \in X$. Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$ u_n est un majorant de X on a $y \leq u_n$. Par conséquent la limite l de la suite u vérifie aussi $y \leq l$. Ainsi l est un majorant de X. Pour montrer que $l = \sup X$ il reste à montrer que si $z \in \mathbf{K}$ vérifie $z < l$ alors z n'est pas un majorant de X. Soit donc un tel z. Puisque $\varepsilon = \frac{l-z}{2} \in \mathbf{K}_+^*$ il existe $N' \in \mathbf{N}$ tel que si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $N' \leq n$ alors $|u_n - l| < \varepsilon$. Il existe aussi $N'' \in \mathbf{N}$ tel que $\tau < (N+1)\varepsilon$. Soit alors n le plus grand des deux entiers N' et N''. On a $|u_n - l| < \varepsilon$ et $v_n = u_n - \frac{\tau}{n+1}$ n'est pas un minorant de X alors que u_n en est un. Il existe donc $z' \in X$ tel que $v_n < z' \leq u_n$ et donc $|u_n - z'| < \frac{\tau}{n+1} \leq \frac{\tau}{N+1} < \varepsilon$ c'est à dire $|u_n - z'| < \varepsilon$. On en déduit de $|u_n - l| < \varepsilon$ et de $|u_n - z'| < \varepsilon$ que $|l - z'| < 2\varepsilon$ et donc que $z = l - 2\varepsilon < z'$. Ainsi z n'est pas un minorant de X.

VIII. Les suites de Cauchy dans un corps archimédien

On considère un corps archimédien $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$.

VIII.1. proposition *Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ une suite et soit $l \in \mathbf{K}$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
1 - pour tout $M \in \mathbf{N}$ il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout couple (n, m) d'entiers naturels supérieurs ou égaux à N on a $|u_n - u_m| < \frac{1}{M+1}$
2 - pour tout $r \in \mathbf{Q}_+^*$ il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout couple (n, m) d'entiers naturels supérieurs ou égaux à N on a $|u_n - u_m| < r$
3 - pour tout $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout couple (n, m) d'entiers naturels supérieurs ou égaux à N on a $|u_n - u_m| < \varepsilon$ (u est de Cauchy).

VIII.2. preuve L'assertion 3 implique l'assertion 2 qui implique l'assertion 1 car il y a les inclusions $\{\frac{1}{M+1} : M \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{Q}_+^* \subset \mathbf{K}_+^*$. Il reste à montrer que l'assertion 1 implique l'assertion 3. Soit $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$. Puisque $\mathbf{K}$ est archimédien et que $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbf{K}_+^*$ la partie entière M de $\frac{1}{\varepsilon}$ existe et c'est un entier naturel. On a

$0 \leq M \leq \frac{1}{\varepsilon} < M+1$ et donc $0 < \frac{1}{M+1} < \varepsilon$. Soit $N \in \mathbf{N}$ donné par l'assertion 1. Pour tout couple (n, m) d'entiers naturels supérieurs ou égaux à N on a $|u_n - u_m| < \frac{1}{M+1}$ Puisque $\frac{1}{M+1} < \varepsilon$ pour tout couple (n, m) d'entiers naturels supérieurs ou égaux à N on a $|u_n - u_m| < \varepsilon$. L'assertion 3 est donc vérifiée dès que l'assertion 1 l'est.

VIII.3. corollaire $\mathcal{C}(\mathbf{Q}) = \mathcal{C}(\mathbf{K}) \cap \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$.

VIII.4. preuve On a $\mathcal{C}(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ et $\mathbf{Q} \subset \mathbf{K}$ donc $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}} \subset \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. De plus d'après la proposition, pour tester si une suite appartenant à $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ appartient à $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ il faut et il suffit de prendre les $\epsilon \in \mathbf{Q}_+^*$. Par conséquent toute suite $u \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ appartient à $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$ si et seulement si elle appartient à $\mathcal{C}(\mathbf{K})$.

VIII.5. proposition *Si* $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$ *et* v *est asymptotiquement fortemement strictement positive alors il existe* $M \in \mathbf{N}$ *tel que* $Mv - u$ *est asymptotiquement fortemement strictement positive.*

VIII.6. preuve Puisque $u \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$ alors u est bornée et il existe $K \in \mathbf{K}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $|u_n| < K$. Puisque v est asymptotiquement fortement strictement positive il existe $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ et $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier naturel supérieur ou égal à N on a $\varepsilon < v_n$. Puisque $\mathbf{K}$ est archimédien et que $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$ il existe $N' \in \mathbf{N}$ tel que $K \leq N'\varepsilon$. Par conséquent si $n \in \mathbf{N}$ est tel que $N \leq n$ alors $u_n < K \leq N'\varepsilon < (N'+1)\varepsilon < (N'+1)v_n$. Par conséquent la suite $Mv - u$ avec $M = N'+1$ est asymptotiquement fortemement strictement positive.

VIII.7. proposition *Si* $u \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$ *il existe* $r \in \mathcal{C}(\mathbf{Q})$ *telle que* $u - r \in \mathcal{L}(\mathbf{K})_0$.

VIII.8. preuve Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$. Si $n \in \mathbf{N}$ on note p_n la partie entière de $(n+1)u_n$ et on pose $r_n = \frac{p_n}{n+1}$. La suite $r = (r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ainsi définie est une suite de rationnels. Montrons que $u - r$ est convergente dans $\mathbf{K}$ de limite 0.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{K}_+^*$. Considérons la partie entière N de $\frac{1}{\varepsilon}$. Elle existe car $\mathbf{K}$ est archimédien. C'est un entier naturel car $\frac{1}{\varepsilon}$ est strictement positif. On a $0 < \frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $p_n \leq (n+1)u_n < p_n + 1$. Si on divise par $n+1$ qui est strictement postif et si ensuite on retranche r_n on obtient $0 \leq u_n - r_n < \frac{1}{n+1}$ et donc $|u_n - r_n| < \frac{1}{n+1}$. Par conséquent si $N \leq n$ alors $|u_n - r_n| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Ceci prouve que la suite $u - r$ est convergente de limite 0.

IX. Les réels

On considère un corps archimédien $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$.

IX.1. définition On définit sur $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ la relation $\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$ suivante. Soit $u, u' \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$. Alors $u\mathcal{R}_{\mathbf{K}}u'$ si et seulement si $u - u' \in \mathcal{L}(\mathbf{K})_0$.

IX.2. proposition *La relation $\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ qui est compatible avec les lois $+$ et $\times$.*

IX.3. preuve Soit $u^1, u^2, u^3, u^4 \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$.

Puisque $u^1 - u^1 = 0$ on a $u^1\mathcal{R}_{\mathbf{K}}u^1$. La relation $\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$ est réflexive.

Supposons que $u^1\mathcal{R}_{\mathbf{K}}u^2$. La différence $u^1 - u^2$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbf{K})_0$. Par conséquent la différence $u^2 - u^1$ appartient aussi à $\mathcal{L}(\mathbf{K})_0$ et $u^2\mathcal{R}_{\mathbf{K}}u^1$. La relation est symétrique.

Supposons que $u^1\mathcal{R}_{\mathbf{K}}u^2$ et que $u^2\mathcal{R}_{\mathbf{K}}u^3$. Les différences $u^1 - u^2$ et $u^2 - u^3$ appartiennent à $\mathcal{L}(\mathbf{K})_0$. Par conséquent, puisque $u^1 - u^3 = (u^1 - u^2) + (u^2 - u^3)$, la différence $u^1 - u^3$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbf{K})_0$ et $u^1\mathcal{R}_{\mathbf{K}}u^3$. La relation est transitivie.

Puisque $\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$ est réflexive, symétrique et transitive, c'est une relation d'équivalence.

On suppose que $u^1\mathcal{R}_{\mathbf{K}}u^2$ et $u^3\mathcal{R}_{\mathbf{K}}u^4$ c'est à dire que les suites $u^1 - u^2$ et $u^3 - u^4$ appartiennent à $\mathcal{L}(\mathbf{K})_0$. Alors $(u^1 + u^3) - (u^2 + u^4) = (u^1 - u^2) + (u^3 - u4)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbf{K})_0$ et donc $(u^1 + u^3)\mathcal{R}_{\mathbf{K}}(u^2 + u^4)$. La relation$\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$ est bien compatible avec $+$. De plus $(u^1u^3) - (u^2u^4) = (u^1 - u^2)u^3 + u^2(u^3 - u4)$. Or u^3 et u^2 sont de Cauchy donc bornées. Puisque $u^1 - u^2$ et $u^3 - u^4$ appartiennent à $\mathcal{L}(\mathbf{K})_0$ on en déduit que $(u^1 - u^2)u^3$ et $u^2(u^3 - u4)$ sont aussi dans $\mathcal{L}(\mathbf{K})_0$ et leur somme $(u^1u^3) - (u^2u^4)$ également. La relation$\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$ est bien compatible avec $\times$.

IX.4. notation On note $+_{\mathbf{K}}$ et $\times_{\mathbf{K}}$ les lois induites par $+$ et $\times$ sur l'espace quotient $\mathcal{C}(\mathbf{K})/\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$. Si $u \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$ on note $\overline{u}^{\mathbf{K}}$ sa classe pour $\mathbf{R}_{\mathbf{K}}$.

IX.5. remarque Si $u, v, w, t \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$ sont tels que $u + v = w$ et $uv = t$ alors $\overline{u}^{\mathbf{K}} +_{\mathbf{K}} \overline{v}^{\mathbf{K}} = \overline{w}^{\mathbf{K}}$ et $\overline{u}^{\mathbf{K}} \times_{\mathbf{K}} \overline{v}^{\mathbf{K}} = \overline{t}^{\mathbf{K}}$.

IX.6. proposition *Toute classe pour la relation $\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$ admet un représentant dans $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$: si $x \in \mathcal{C}(\mathbf{K})/\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$ il existe $r \in \mathcal{C}(\mathbf{Q}) \subset \mathcal{C}(\mathbf{K})$ tel que $\overline{r}^{\mathbf{K}} = x$.*

IX.7. preuve Soit $x \in \mathcal{C}(\mathbf{K})/\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$ et soit $u \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$ un représentant de x : $\overline{r}^{\mathbf{K}} = x$. Puisque $\mathbf{K}$ est archimédien pour toute suite $u \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$ il existe $r \in \mathcal{C}(\mathbf{Q})$ telle que $u - r \in \mathcal{L}(\mathbf{K})_0$: les suites u et r sont dans la même classe.

IX.8. remarque Cette proposition signifie que $\mathcal{C}(\mathbf{K})/\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$ est formé des $\overline{r}^{\mathbf{K}}$ avec $r \in \mathcal{C}(\mathbf{Q})$.

IX.9. proposition *Si* $r \in \mathcal{C}(\mathbf{Q})$ *alors* $\overline{r}^{\mathbf{Q}} = \overline{r}^{\mathbf{K}} \cap \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$.

IX.10. preuve Soit $r \in \mathcal{C}(\mathbf{Q})$. On sait que pour tester si une suite appartient à $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ il suffit de prendre les $\epsilon \in \mathbf{Q}_+^*$.

Par conséquent si $s \in \mathcal{C}(\mathbf{Q})$ verifie $r\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}s$ (c'est à dire si $s-r \in \mathcal{L}(\mathbf{Q})_0$ ou encore $s \in \overline{r}^{\mathbf{Q}}$) alors $r\mathcal{R}_{\mathbf{K}}s$ (c'est à dire si $s-r \in \mathcal{L}(\mathbf{K})_0$ ou encore $s \in \overline{r}^{\mathbf{K}}$). Ainsi $\overline{r}^{\mathbf{Q}} \subset \overline{r}^{\mathbf{K}}$.

De plus si $s \in \overline{r}^{\mathbf{K}} \cap \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ alors $s-r \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ et $s-r \in \mathcal{L}(\mathbf{K})_0$. Par conséquent $s-r \in \mathcal{L}(\mathbf{Q})_0$ et $s \in \overline{r}^{\mathbf{Q}}$.

IX.11. remarque Cette proposition signifie que si $r, s \in \mathcal{C}(\mathbf{Q})$ alors $\overline{r}^{\mathbf{K}} = \overline{s}^{\mathbf{K}}$ si et seulement si $\overline{r}^{\mathbf{Q}} = \overline{s}^{\mathbf{Q}}$.

IX.12. corollaire *Il existe une bijection* $\mathbf{b}$ *de* $\mathcal{C}(\mathbf{Q})/\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$ *dans* $\mathcal{C}(\mathbf{K})/\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*
- si $r \in \mathcal{C}(\mathbf{Q})$ *alors* $\mathbf{b}(\overline{r}^{\mathbf{Q}}) = \overline{r}^{\mathbf{K}}$
- si $r, s \in \mathcal{C}(\mathbf{Q}$ *alors*

$$\mathbf{b}(\overline{r}^{\mathbf{Q}} +_{\mathbf{Q}} \overline{s}^{\mathbf{Q}}) = \mathbf{b}(\overline{r+s}^{\mathbf{Q}}) = \overline{r+s}^{\mathbf{K}} = \overline{r}^{\mathbf{K}} +_{\mathbf{K}} \overline{s}^{\mathbf{K}} = \mathbf{b}(\overline{r}^{\mathbf{Q}}) +_{\mathbf{K}} \mathbf{b}(\overline{s}^{\mathbf{Q}})$$

et

$$\mathbf{b}(\overline{r}^{\mathbf{Q}} \times_{\mathbf{Q}} \overline{s}^{\mathbf{Q}}) = \mathbf{b}(\overline{r \times s}^{\mathbf{Q}}) = \overline{r \times s}^{\mathbf{K}} = \overline{r}^{\mathbf{K}} \times_{\mathbf{K}} \overline{s}^{\mathbf{K}} = \mathbf{b}(\overline{r}^{\mathbf{Q}}) \times_{\mathbf{K}} \mathbf{b}(\overline{s}^{\mathbf{Q}}).$$

IX.13. preuve Puisque tout élément de $\mathcal{C}(\mathbf{K})/\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$ admet un représentant dans $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$ et puisque si $r, s \in \mathcal{C}(\mathbf{Q})$ on a $\overline{r}^{\mathbf{K}} = \overline{s}^{\mathbf{K}}$ si et seulement si $\overline{r}^{\mathbf{Q}} = \overline{s}^{\mathbf{Q}}$ on en déduit que l'ensemble

$$\{(\overline{r}^{\mathbf{Q}}, \overline{r}^{\mathbf{K}}) : r \in \mathcal{C}(\mathbf{Q})\}$$

est le graphe d'une bijection $\mathbf{b}$ entre $\mathcal{C}(\mathbf{Q})/\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$ et $\mathcal{C}(\mathbf{K})/\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$

Soit $r, s \in \mathcal{C}(\mathbf{Q})$. On a $\overline{r}^{\mathbf{Q}} +_{\mathbf{Q}} \overline{s}^{\mathbf{Q}} = \overline{r+s}^{\mathbf{Q}}$ et $\overline{r}^{\mathbf{Q}} \times_{\mathbf{Q}} \overline{s}^{\mathbf{Q}} = \overline{r \times s}^{\mathbf{Q}}$. On a aussi $\overline{r}^{\mathbf{K}} +_{\mathbf{K}} \overline{s}^{\mathbf{K}} = \overline{r+s}^{\mathbf{K}}$ et $\overline{r}^{\mathbf{K}} \times_{\mathbf{K}} \overline{s}^{\mathbf{K}} = \overline{r \times s}^{\mathbf{K}}$. Or $\mathbf{b}(\overline{r}^{\mathbf{Q}}) = \overline{r}^{\mathbf{K}}$, $\mathbf{b}(\overline{s}^{\mathbf{Q}}) = \overline{s}^{\mathbf{K}}$, $\mathbf{b}(\overline{r+s}^{\mathbf{Q}}) = \overline{r+s}^{\mathbf{K}}$ et $\mathbf{b}(\overline{r \times s}^{\mathbf{Q}}) = \overline{r \times s}^{\mathbf{K}}$.

Par conséquent il vient

$$\mathbf{b}(\overline{r}^{\mathbf{Q}} +_{\mathbf{Q}} \overline{s}^{\mathbf{Q}}) = \mathbf{b}(\overline{r+s}^{\mathbf{Q}}) = \overline{r+s}^{\mathbf{K}} = \overline{r}^{\mathbf{K}} +_{\mathbf{K}} \overline{s}^{\mathbf{K}} = \mathbf{b}(\overline{r}^{\mathbf{Q}}) +_{\mathbf{K}} \mathbf{b}(\overline{s}^{\mathbf{Q}})$$

et

$$\mathbf{b}(\overline{r}^{\mathbf{Q}} \times_{\mathbf{Q}} \overline{s}^{\mathbf{Q}}) = \mathbf{b}(\overline{r \times s}^{\mathbf{Q}}) = \overline{r \times s}^{\mathbf{K}} = \overline{r}^{\mathbf{K}} \times_{\mathbf{K}} \overline{s}^{\mathbf{K}} = \mathbf{b}(\overline{r}^{\mathbf{Q}}) \times_{\mathbf{K}} \mathbf{b}(\overline{s}^{\mathbf{Q}}).$$

IX.14. remarque Ce corollaire signifie que l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbf{Q})/\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$ muni des lois $+_{\mathbf{Q}}$ et $\times_{\mathbf{Q}}$ est identifié à l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbf{K})/\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$ muni des lois $+_{\mathbf{K}}$ et $\times_{\mathbf{K}}$ par $\mathbf{b}$.

IX.15. notation En raison de l'identification ci-dessus on oublie la référence à $\mathbf{K}$ et on note $\mathbf{R}$ l'espace quotient $\mathcal{C}(\mathbf{K})/\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$ et on note encore par $+$ et $\times$ les lois induites par $+$ et $\times$ sur $\mathbf{R}$. On note 0 et 1 les classes dont les représentants sont les suites constantes égales à 0 et 1.

IX.16. définition On appelle *ensemble des nombres réels* et l'ensemble quotient $\mathbf{R} = \mathcal{C}(\mathbf{K})/\mathcal{R}$ (ou $\mathcal{C}(\mathbf{Q})/\mathcal{R}$ puisqu'ils sont identifiés par $\mathbf{b}$). Les éléments de $\mathbf{R}$ sont appelés les *réels* ou les *nombres réels*.

IX.17. proposition *L'ensemble* $\mathbf{R}$ *muni des lois* $+$ *et* $\times$ *est un corps commutatif. Le neutre pour* $+$ *est* 0 *et le neutre pour* $\times$ *est* $-$.

IX.18. preuve On sait que $(\mathcal{C}(\mathbf{K}), +, \times)$ est un anneau commutatif dont le neutre pour $+$ est la suite constante 0 et le neutre pour $\times$ la suite constante 1. Puisque la relation $\mathcal{R}$ est compatible avec $+$ et $\times$ le quotient $\mathbf{R} = \mathcal{C}(\mathbf{K})/\mathcal{R}$ muni des lois induites $+$ et $\times$ est un anneau commutatif unitaire. Il reste à montrer que si $x \in \mathbf{R}$ est différent de 0 il existe $y \in \mathbf{R}$ tel que $xy = 1$. Soit $u \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$ un représentant de x. C'est une suite de Cauchy dans $\mathbf{K}$ asymptotiquement fortement strictement positive ou négative. Il existe donc $v \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$ asymptotiquement fortement strictement positive ou négative telle que uv soit une suite convergente de limite 1. La suite uv est dans la même classe que la suite constante égale à 1. Par passage au quotient ceci signifie que $xy = 1$.

IX.19. définition On définit sur $\mathbf{R}$ une relation notée $\leq$ en posant $x \leq y$ si x et y admettent des représentants u et v tels que $v - u$ est convergente de limite 0 ou $v - u$ est asymptotiquement fortement strictement positive.

IX.20. proposition *La relation* $\leq$ *est une relation d'ordre total.*

IX.21. preuve Soit $x, y, z \in \mathbf{R}$.

Soit u un représentant de x. Puisque $u - u$ est la suite constante 0 on a $x \leq x$. La relation $\leq$ est réflexive.

Supposons que $x \leq y$. Il existe de représentants u de x et v de y tels que $v - u$ convergente de limite 0 ou asymptotiquement fortement strictement positive. Si $v - u$ convergente de limite 0 alors $x = y$. Supposons que $x \neq y$. Alors $v - u$ est asymptotiquement fortement strictement positive. Considérons maintenant des représentants u' de x et v' de y. Alors $u - u'$ et $v - v'$ sont convergentes de limite 0. Or $u'-v' = (u'-u)+(u-v)+(v-v')$. Par conséquent $u'-v'$ est asymptotiquement fortement strictement négative quelque soit u' représentant x et v' représentant y. Ainsi si $x \leq y$ et $x \neq y$ alors on n'a pas $y \leq x$. La relation $\leq$ est antisymétrique

Supposons que $x \leq y$ et $y \leq z$. Il existe des représentatnts u de x, v de y et w de z tel que $v-u$ est convergente de limite 0 ou asymptotiquement fortement strictement positive et $w-u$ est convergente de limite 0 ou asymptotiquement fortement strictement positive. Par conséquent $w-u = (w-v)+(v-u)$ est aussi convergente de limite 0 ou asymptotiquement fortement strictement positive. La relation $\leq$ est transitive.

La relation $\leq$ est une relation d'ordre car elle réfléxive, symétrique et transitive.

Soit u un représentant de x et v un représentant de v. Alors soit $v-u$ est convergente de limite 0, soit $v-u$ est asymptotiquement fortement strictement positive, soit $u-v$ est asymptotiquement fortement strictement positive. Par conséquent soit $x \leq y$ soit $y \leq x$. Les éléments de $\mathbf{R}$ sont deux à deux comparables. L'ordre $\leq$ est total.

IX.22. définition Les réels *positifs ou nuls* sont les $x \in \mathbf{R}$ tel que $0 \leq x$.

IX.23. proposition *La relation $\leq$ définie sur $\mathbf{R}$ est compatible avec l'addition et la multiplication par les réels positifs ou nuls.*

IX.24. preuve Soit $x, y, z \in \mathbf{R}$ et $u, v, w \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$ des représentants.

On suppose que $x \leq y$: $v-u$ est convergente de limite 0 ou $v-u$ est asymptotiquement fortement strictement positive. C'est encore le cas pour $(v+w)-(u+w)$. Or $u+w$ est un représentant de $x+z$ et $v+w$ est un représentant de $y+z$. Par conséquent $x+z = z+x \leq y+z = z+y$. La relation $\leq$ est compatible avec l'addition.

On suppose que $x \leq y$ et que $0 \leq z$: $v-u$ est convergente de limite 0 ou que $v-u$ est asymptotiquement fortement strictement positive et w est convergente de limite 0 ou que $v-u$ est asymptotiquement fortement strictement positive. C'est encore le cas pour $wv - wu = w(v-u)$ car le produit d'une suite convergente cers 0 et d'une suite de Cauchy est une suite convergente vers 0 et le produit de deux suites asymptotiquement fortement strictement positives est une suite asymptotiquement fortement strictement positive. Par conséquent $xz = zx \leq yz = zy$. La relation $\leq$ est compatible avec la multiplication par des réels positifs ou nuls.

IX.25. proposition *La relation d'ordre $\leq$ définie sur $\mathbf{R}$ prolonge l'ordre de*

$\mathbf{Q}$. *Le corps des réels est archimédien.*

IX.26. preuve L'application $\mathbf{i}$ qui à $r \in \mathbf{Q}$ associe sa classe $\mathbf{i}(r) \in \mathbf{R}$ vérifie par construction $\mathbf{i}(0) = 0$, $\mathbf{i}(1) = 1$ et $\mathbf{i}(r+s) = \mathbf{i}(r)+\mathbf{i}(s)$. Elle respecte donc l'odre de $\mathbf{Q}$ et elle est injective. La relation d'ordre définie sur $\mathbf{R}$ prolonge donc l'ordre de $\mathbf{Q}$.

Soit $x, y \in \mathbf{R}$ tel que $0 < y$. Le réel v admet un représentant v qui est une suite de Cauchy asymptotiquement fortement strictement positive. Soit $u \in \mathcal{C}(\mathbf{Q})$ un représentant de u. Puisque $\mathbf{Q}$ est archimédien il existe $M \in \mathbf{N}$ tel que $Mv - u$ est asymptotiquement fortement strictement positive. Ceci signifie que $u < Mv$. Le corps des réels est bien archimédien.

IX.27. proposition *L'application* $\mathbf{j}$ *qui à* $x \in \mathbf{K}$ *(*x *est considéré comme la suite constante* x*) associe sa classe* $\mathbf{j}(x) \in \mathbf{R}$ *vérifie les propriétés suivantes :* $\mathbf{j}(0) = 0$, $\mathbf{j}(1) = 1$, *et si* $x, y \in \mathbf{K}$, $\mathbf{j}(x+y) = \mathbf{j}(x)+\mathbf{j}(y)$ *et* $\mathbf{j}(x\times y) = \mathbf{j}(x)\times\mathbf{j}(y)$. *De plus elle est injective et respecte l'ordre.*

IX.28. preuve L'application $\mathbf{j}$ est la restriction à $\mathbf{K} \subset \mathcal{C}(\mathbf{K})$ du passage au quotient par $\mathcal{R}_K$. Puisque cette relation est compatible avec les lois on a bien $\mathbf{j}(0) = 0$, $\mathbf{j}(1) = 1$ et $\mathbf{j}(x + y) = \mathbf{j}(x) + \mathbf{j}(y)$ et $\mathbf{j}(x \times y) = \mathbf{j}(x) \times \mathbf{j}(y)$. Elle est injective et respecte l'ordre car si $x < y$ (dans $\mathbf{K}$) alors la suite $y - x$ est asymptotiquement fortement strictement positive et donc x et y ne sont pas en relation par $\mathcal{R}_K$, ils sont dans des classes $\mathbf{j}(x)$ et $\mathbf{j}(y)$ différentes et $\mathbf{j}(x) < \mathbf{j}(y)$ dans $\mathbf{R}$.

IX.29. remarque Cette proposition signifie que tout corps archimédien s'identifie à une partie de $\mathbf{R}$.

IX.30. définition Un corps commutatif totalement ordonné $\mathbf{K}$ est *complet* si toute suite de Cauchy converge c'est à dire si $\mathcal{C}(\mathbf{K}) = \mathcal{L}(\mathbf{K})$.

IX.31. proposition *Le corps* $\mathbf{R}$ *est complet :* $\mathcal{C}(\mathbf{R}) = \mathcal{L}(\mathbf{R})$

IX.32. preuve Puisque toute suite convergente est de Cauchy il suffit de considérer une suite de Cauchy $u \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ et de montrer qu'elle est convergente.

Puisque $\mathbf{R}$ est archimédien il existe une suite de Cauchy $r = (r_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{C}(\mathbf{Q})$ tel que $u - r \in \mathcal{C}(\mathbf{R})_0$. Il suffit donc de montrer que $r \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$. Puisque r est une suite de Cauchy dans $\mathbf{Q}$ c'est le représentant d'un réel $l \in \mathbf{R}$. Montrons que la suite $r \in \mathcal{L}(\mathbf{R})_l$.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{Q}_+^*$. Puisque r est de Cauchy et que $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbf{Q}_+^*$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $n, m \in \mathbf{N}$ sont supérieurs ou égaux à N on a $|r_n - r_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour conclure il suffit qu'on prouve maintenant que si $n \in \mathbf{N}$ est supérieur ou égal à N alors $|r_n - l| < \varepsilon$. Fixons un $n \in \mathbf{N}$ supérieur ou égal à N. Pour montrer l'inégalité $|r_n - l| < \varepsilon$ il suffit de montrer qu'il existe une suite appartenant à $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$, représentant le réel $\varepsilon - |r_n - l|$ et qui est asymptotiquement fortement strictement positive. La suite s définie par $s_m = \varepsilon - |r_n - r_m|$ si $m \in \mathbf{N}$ représente le réel $\varepsilon - |r_n - l|$. On a pour tout $m \in \mathbf{N}$ tel que $N \leq m$, $|r_n - r_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon - |r_n - r_m| = s_m$: la suite s est bien asymptotiquement fortement strictement positive. Par conséquent on a bien $|r_n - l| < \varepsilon$. Ceci prouve la convergence de r et de u vers l.

X. Un corps commutatif totalement ordonné, complet et non-archimédien

On considère un anneau commutatif $(\mathbf{A}, +, \times, \leq)$.

X.1. notation Si $f \in \mathbf{A}^{\mathbf{Z}}$ et $k \in \mathbf{Z}$ f_k désigne l'image f_k de k par f.

X.2. définition Si $f \in \mathbf{A}^{\mathbf{Z}}$ on appelle *support* de f et on note $\operatorname{supp} f$ l'ensemble $\operatorname{supp} f = \{k \in \mathbf{Z} : f_k \neq 0\}$.

X.3. proposition *Soit $f \in \mathbf{A}^{\mathbf{Z}}$. La fonction f est nulle si et seulement si* $\operatorname{supp} f = \emptyset$.

X.4. preuve Si $f = 0$ et si $k \in \mathbf{Z}$ alors $f_k = 0$ donc $k \notin \operatorname{supp} f$. Ainsi si $f = 0$ alors $\operatorname{supp} f = \emptyset$. Réciproquement si $\operatorname{supp} f = \emptyset$ et si $k \in \mathbf{Z}$ alors $k \notin \operatorname{supp} f$ donc $f_k = 0$. Ainsi si $\operatorname{supp} f = \emptyset$ alors $f = 0$.

X.5. proposition *Si $f \in \mathbf{A}^{\mathbf{Z}}$ alors* $\operatorname{supp}(-f) = \operatorname{supp} f$.

X.6. preuve Soit $k \in \mathbf{Z}$. Alors $(-f)_k = -(f_k)$ donc $(-f)_k = 0$ si et seulement si $f_k = 0$. Ceci signifie que $k \notin \operatorname{supp}(-f)$ si et seulement si $k \notin \operatorname{supp} f$ ou encore $k \in \operatorname{supp}(-f)$ si et seulement si $k \in \operatorname{supp} f$. Ainsi $\operatorname{supp}(-f) = \operatorname{supp} f$.

X.7. notation On désigne par $\mathbf{F}$ le sous-ensemble de $\mathbf{A}^{\mathbf{Z}}$ des fonctions de supports minorés. Soit $f \in \mathbf{A}^{\mathbf{Z}}$. La fonction f appartient à $\mathbf{F}$ s'il existe $p \in \mathbf{Z}$ qui minore $\operatorname{supp} f$.

X.8. remarque L'ensemble $\mathbf{F}$ n'est pas vide car il contient la fonction nulle et la fonction notée $\mathbf{1}_{\mathbf{F}}$ de support le singleton $\{0\}$ et qui prend les valeurs 0 et 1.

X.9. proposition *Si $f, g \in \mathbf{F}$ alors $-f \in \mathbf{F}$ et $f + g \in \mathbf{F}$.*

X.10. preuve Soit $f, g \in \mathbf{F}$, et $p \in \mathbf{Z}$ un minorant de $\operatorname{supp} f$ et de $\operatorname{supp} g$.

Si $k \in \mathbf{Z}$ est inférieur strictement à p alors $(-f)_k = -(f_k) = -0 = 0$ d'une part et d'autre part $f_k = g_k = 0$ et donc $(f+g)_k = f_k + g_k = 0 + 0 = 0$. Les supports $\operatorname{supp}(-f)$ et $\operatorname{supp}(f+g)$ de $-f$ et de $f+g$ admettent p comme minorant. Par conséquent $-f \in \mathbf{F}$ et $f+g \in \mathbf{F}$.

X.11. corollaire *Le sous-ensemble* $\mathbf{F}$ *est stable par* $+$ *et* $(\mathbf{F}, +)$ *est un groupe commutatif.*

X.12. preuve L'ensemble $\mathbf{A}^{\mathbf{Z}}$ muni de l'addition est un groupe commutatif. On vient de voir que le sous-ensemble $\mathbf{F}$ de $\mathbf{A}^{\mathbf{Z}}$ est non vide, qu'il est stable par $+$ et que l'inverse pour $+$ de tout élément de $\mathbf{F}$ est encore dans $\mathbf{F}$. Par conséquent $(\mathbf{F}, +)$ est bien un groupe commutatif.

X.13. définition Si $f \in \mathbf{F}$ n'est pas la fonction nulle (i.e. si $\operatorname{supp} f \neq \emptyset$) on appelle *ordre de* f et on note ν_f le plus petit élément de $\operatorname{supp} f$.

X.14. exemple L'ordre de $\mathbf{1_F}$ est 0.

X.15. proposition *Si* $f \in \mathbf{F}$ *n'est pas la fonction nulle alors* $\nu_{-f} = \nu_f$.

X.16. preuve Puisque car $\operatorname{supp}(-f) = \operatorname{supp} f$ on a

$$\nu_{-f} = \min \operatorname{supp}(-f) = \min \operatorname{supp} f = \nu_{-f}.$$

X.17. proposition *Soit* $f, g \in \mathbf{F}$ *telles que* $f, g \neq 0$. *Si* $\nu_f < \nu_g$ *alors* $\nu_{f+g} = \nu_f$ *et* $(f+g)_{\nu_{f+g}} = f_{\nu_f}$. *Si* $\nu_f = \nu_g$ *et* $f_{\nu_f} + g_{\nu_f} \neq 0$ *alors* $\nu_{f+g} = \nu_f = \nu_g$ *et* $(f+g)_{\nu_{f+g}} = f_{\nu_f} + g_{\nu_f}$.

X.18. preuve On suppose $\nu_f < \nu_g$. Soit $k \in \mathbf{Z}$. Si $k < \nu_f$ alors $k < \nu_g$ donc $f_k = g_k = 0$ et $(f+g)_k = f_k + g_k = 0 + 0 = 0$. On a $f_{\nu_f} \neq 0$ et $g_{\nu_f} = 0$ donc $(f+g)_{\nu_f} = f_{\nu_f} \neq 0$. Ainsi $\nu_{f+g} = \nu_f$ et $(f+g)_{\nu_{f+g}} = f_{\nu_f}$.

On suppose $\nu_f = \nu_g$ et $f_{\nu_f} + g_{\nu_f} \neq 0$. Soit $k \in \mathbf{Z}$. Si $k < \nu_f = \nu_g$ alors $f_k = g_k = 0$ et $(f+g)_k = f_k + g_k = 0 + 0 = 0$. On a $f_{\nu_f} \neq 0$ et $g_{\nu_f} \neq 0$ et $f_{\nu_f} + g_{\nu_f} \neq 0$ donc $(f+g)_{\nu_f} = f_{\nu_f} + g_{\nu_f} \neq 0$. Ainsi $\nu_{f+g} = \nu_f$ et $(f+g)_{\nu_{f+g}} = f_{\nu_f} + g_{\nu_f}$.

X.19. proposition *Soit* $f, g \in \mathbf{F}$ *telles que* $f, g \neq 0$, $k \in \mathbf{Z}$ *et* $(i, j) \in \mathbf{Z}$ *tels que* $i + j = k$. *Si* $f_i \times g_j \neq 0$ *alors* $\nu_f \leq i \leq k - \nu_g$ *et* $\nu_g \leq j \leq k - \nu_f$.

X.20. preuve Soit $k \in \mathbf{Z}$ et $(i, j) \in \mathbf{Z}$ tels que $i + j = k$.

Si $i < \nu_f$ alors $f_i = 0$ et donc $f_i \times g_j = 0$. Si $k - \nu_g < i$ alors $j = k - i < \nu_g$ donc $g_j = 0$ et $f_i \times g_j = 0$. Si $j < \nu_g$ alors $g_j = 0$ et donc $f_i \times g_j = 0$. Si $k - \nu_f < j$ alors $i = k - j < \nu_f$ donc $f_i = 0$ et $f_i \times g_j = 0$.

Par conséquent si $f_i \times g_j \neq 0$ alors $\nu_f \leq i \leq k - \nu_g$ et $\nu_g \leq j \leq k - \nu_f$.

X.21. définition Soit $f, g \in \mathbf{F}$ et $k \in \mathbf{Z}$. Si $f, g \neq 0$ on pose

$$X_{f,g,k} = \{(i,j) \in \mathbf{Z}^2 : i + j = k, \nu_f \leq i \leq k - \nu_g, \nu_g \leq j \leq k - \nu_f\}.$$

Sinon on pose $X_{f,g,k} = \emptyset$.

X.22. proposition *Soit $f, g \in \mathbf{F}$. Si $k \in \mathbf{Z}$. Soit $(i,j) \in \mathbf{Z}$ tel que $i + j = k$. Si $f_i \times g_j \neq 0$ alors $(i,j) \in X_{f,g,k}$. Supposons $f \neq 0$ et $g \neq 0$. L'ensemble $X_{f,g,k}$ est fini et*

$$X_{f,g,k} = \{(\nu_f + t, k - \nu_f - t) : t \in \mathbf{N}, 0 \leq t \leq k - \nu_f - \nu_g\}.$$

Il est non vide si et seulement si $\nu_f + \nu_g \leq k$.

X.23. preuve Si $f = 0$ ou $g = 0$ alors $X_{f,g,k} = \emptyset$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et pour tout $(i,j) \in \mathbf{Z}$ $f_i \times g_j = 0$.

Supposons $f \neq 0$ et $g \neq 0$. On a On déduit de la proposition précédente que si $(i,j) \in \mathbf{Z}$ pour que $f_i \times g_j \neq 0$ il faut que $(i,j) \in X_{f,g,k}$.

Soit $(i,j) \in X_{f,g,k}$. Alors $i+j = k$, $\nu_f \leq i \leq k-\nu_g$, $\nu_g \leq j \leq k-\nu_f$. Si on pose $t = i - \nu_f$ on a $i = \nu_f + t$, $j = k - i = k - \nu_f - t$ et $0 \leq t \leq k - \nu_f - \nu_g$ donc $(i,j) \in \{(\nu_f + t, k - \nu_f - t) : t \in \mathbf{N}, 0 \leq t \leq k - \nu_f - \nu_g\}$. On vient de montrer que

$$X_{f,g,k} \subset \{(\nu_f + t, k - \nu_f - t) : t \in \mathbf{N}, 0 \leq t \leq k - \nu_f - \nu_g\}.$$

Inversement soit $t \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leq t \leq k - \nu_f - \nu_g$. Alors $(\nu_f + t) + (k - \nu_f - t) = k$, $\nu_f \leq (\nu_f + t) \leq k - \nu_g$ et $\nu_g \leq (k - \nu_f - t) \leq k - \nu_f$. Par conséquent $(\nu_f + t, k - \nu_f - t) \in X_{f,g,k}$. Ainsi

$$\{(\nu_f + t, k - \nu_f - t) : t \in \mathbf{N}, 0 \leq t \leq k - \nu_f - \nu_g\} \subset X_{f,g,k}.$$

On a prouvé par double inclusion que

$$X_{f,g,k} = \{(\nu_f + t, k - \nu_f - t) : t \in \mathbf{N}, 0 \leq t \leq k - \nu_f - \nu_g\}.$$

Si $t, t' \in \mathbf{Z}$ sont tels que $(\nu_f + t, k - \nu_f - t) = (\nu_f + t', k - \nu_f - t')$ alors $t = t'$. Ceci montre que $X_{f,g,k}$ est fini de même cardinal que $\{t \in \mathbf{N} : 0 \leq t \leq k - \nu_f - \nu_g\}$. Ainsi $X_{f,g,k}$ est non vide si et seulement si $\nu_f + \nu_g \leq k$ et alors son cardinal est $k - \nu_f - \nu_g$.

X.24. corollaire *Soit $f, g \in \mathbf{F}$ et soit $k \in \mathbf{Z}$. L'ensemble $X_{f,g,k}$ est fini et si X est un sous-ensemble fini de $\mathbf{Z}^2$ qui contient $X_{f,g,k}$ et qui est inclus dans $\{(i,j) \in \mathbf{Z}^2 : i+j=k\}$ alors*

$$\sum_{(i,j)\in X} f_i \times g_j = \sum_{(i,j)\in X_{f,g,k}} f_i \times g_j.$$

X.25. preuve Puisque $X_{f,g,k} \subset X$ on a

$$\sum_{(i,j)\in X} f_i \times g_j = (\sum_{(i,j)\in X_{f,g,k}} f_i \times g_j) + (\sum_{(i,j)\in X\setminus X_{f,g,k}} f_i \times g_j).$$

Or si $(i,j) \in X \setminus X_{f,g,k}$ alors $f_i \times g_j = 0$. Donc $\sum_{(i,j)\in X\setminus X_{f,g,k}} f_i \times g_j = 0$ et

$$\sum_{(i,j)\in X} f_i \times g_j = \sum_{(i,j)\in X_{f,g,k}} f_i \times g_j.$$

X.26. définition D'après le corollaire précédent on définit une application $*$ de $\mathbf{F} \times F$ dans $\mathbf{A}^{\mathbf{Z}}$ en posant si $f, g \in \mathbf{F}$, $k \in \mathbf{Z}$

$$(f * g)_k = \sum_{(i,j)\in X_{f,g,k}} f_i \times g_j.$$

X.27. remarque D'après la proposition précédente l'application $*$ est à valeur dans $\mathbf{F}$: c'est une loi de composition interne. On a $f * 0 = 0 * f = 0$. De plus si X est un sous-ensemble fini de $\mathbf{Z}^2$ qui contient $X_{f,g,k}$ et qui est inclus dans $\{(i,j) \in \mathbf{Z}^2 : i+j=k\}$ alors

$$(f * g)_k = \sum_{(i,j)\in X} f_i \times g_j.$$

Enfin si $f \neq 0$, $g \neq 0$ et $\nu_f + \nu_g \leq k$ alors

$$(f * g)_k = \sum_{i=0}^{k-\nu_f-\nu_g} f_{\nu_f+i} \times g_{k-\nu_f-i}$$

X.28. proposition *Soit $f, g \in \mathbf{F}$ telles que $f, g \neq 0$. Alors $\nu_{f*g} = \nu_f + \nu_g$ et $(f * g)_{\nu_{f*g}} = f_{\nu_f} \times g_{\nu_g}$.*

X.29. preuve D'après la définition de $*$ si $k < \nu_f + \nu_g$ alors $(f*g)_k = 0$ et

$$(f*g)_{\nu_f+\nu_g} = \sum_{i=0}^{0} f_{\nu_f+i} \times g_{\nu_g-i} = f_{\nu_f+0} \times g_{\nu_g-0} = f_{\nu_f} \times g_{\nu_g}.$$

Puisque $f_{\nu_f}, g_{\nu_g} \neq 0$ on a $f_{\nu_f} \times g_{\nu_g} \neq 0$ et donc $(f*g)_{\nu_f+\nu_g} \neq 0$. Ceci prouve que $\nu_f + \nu_g$ est le plus petit élément de $\mathrm{supp}\,(f*g)$ c'est à dire que $\nu_{f*g} = \nu_f + \nu_g$ et que $(f*g)_{\nu_{f*g}} = f_{\nu_f} \times g_{\nu_g}$.

X.30. proposition *La loi $*$ est commutative.*

X.31. preuve Soit $f, g \in \mathbf{F}$. Si $f = 0$ ou $g = 0$ alors $X_{f,g,k} = \emptyset = X_{g,f,k}$ donc

$$(f*g)_k = \sum_{(i,j)\in X_{f,g,k}} f_i \times g_j = \sum_{(i,j)\in\emptyset} f_i \times g_j = e = \sum_{(j,i)\in\emptyset} g_j \times f_i = \sum_{(j,i)\in X_{g,f,k}} g_j \times f_i = (g*f)_k$$

quelque soit $k \in \mathbf{Z}$ donc $f*g = 0 = f*f$.

On suppose que $f \neq 0$ et $g \neq 0$. Si $k \in \mathbf{Z}$ on a

$$X_{f,g,k} = \{(i,j) \in \mathbf{Z}^2 : i+j = k, \nu_f \leq i \leq k-\nu_g, \nu_g \leq j \leq k - \nu_f\}.$$

Par conséquent si $(i,j) \in \mathbf{Z}^2$ alors $(i,j) \in X_{f,g,k}$ si et seulement si $(j,i) \in X_{g,f,k}$. Donc

$$\begin{aligned}(f*g)_k &= \sum_{(i,j)\in X_{f,g,k}} f_i \times g_j \\ &= \sum_{(j,i)\in X_{g,f,k}} f_i \times g_j \\ &= \sum_{(j,i)\in X_{g,f,k}} g_j \times f_i \\ &= (g*f)_k.\end{aligned}$$

Par conséquent $f*g = 0 = f*f$.

X.32. proposition *La loi $*$ est distributive par rapport à $+$*

X.33. preuve Soit $f, g, h \in \mathbf{A}$. Puisque $*$ est commutative il suffit de montrer que $f*(g+h) = (f*g)+(f*h)$.

Soit $k \in \mathbf{Z}$. Les ensembles $X_{f,g,k}$, $X_{f,h,k}$ et $X_{f,g+h,k}$ sont finis et sont tous inclus dans l'ensemble $\{(i,j) \in \mathbf{Z}^2 : i+j = k\}$. Soit X leur réunion. L'ensemble X est fini et il est aussi inclus dans $\{(i,j) \in \mathbf{Z}^2 : i+j = k\}$. Par conséquent

$$(f*g)_k = \sum_{(i,j)\in X} f_i \times g_j,$$

$$(f*h)_k = \sum_{(i,j)\in X} f_i \times h_j,$$

$$(f*(g+h))_k = \sum_{(i,j)\in X} f_i \times (g_j + h_j).$$

Donc

$$\begin{array}{rcl}
(f*g)_k + (f*h)_k & = & (\sum_{(i,j)\in X} f_i \times g_j) + (\sum_{(i,j)\in X} f_i \times h_j) \\
& = & \sum_{(i,j)\in X} ((f_i \times g_j) + (f_i \times h_j)) \\
& = & \sum_{(i,j)\in X} (f_i \times (g_j + h_j) \\
& = & (f*(g+h))_k.
\end{array}$$

X.34. proposition *La loi $*$ est associative.*

X.35. preuve Soit $f, g, h \in \mathbf{F}$.

Si $f = 0$ ou $g = 0$ ou $h = 0$ alors $f*(g*h) = 0 = (f*g)*h$.

On suppose que $f \neq 0$, $g \neq 0$ et $h \neq 0$. On a $\nu_{g*h} = \nu_g + \nu_h$, $\nu_{f*g} = \nu_f + \nu_g$ et $\nu_{(f*g)*h} = \nu_{f*(g*h)} = \nu_f + \nu_g + \nu_h$.

Soit $k \in \mathbf{Z}$. Si $k < \nu_f + \nu_g + \nu_h$ alors $(f*(g*h))_k = (f*g)*h)_k = 0$. Supposons $\nu_f + \nu_g + \nu_h \leq k$. On a

$$\begin{array}{rcl}
(f*(g*h))_k & = & \sum_{(i,j)\in X_{f,g*h,k}} f_i \times (g*h)_j \\
& = & \sum_{(i,j)\in X_{f,g*h,k}} f_i \times (\sum_{(p,q)\in X_{g,h,j}} g_p \times h_q) \\
& = & \sum_{(i,j)\in X_{f,g*h,k}} (\sum_{(p,q)\in X_{g,h,j}} f_i \times g_p \times h_q)
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}
(f*g)*h))_k & = & \sum_{(j,q)\in X_{f*g,h,k}} (f*g)_j \times h_q \\
& = & \sum_{(j,q)\in X_{f*g,h,k}} (\sum_{(i,p)\in X_{f,g,j}} f_i \times g_p) \times h_q \\
& = & \sum_{(j,q)\in X_{f*g,h,k}} (\sum_{(i,p)\in X_{f,g,j}} f_i \times g_p \times h_q).
\end{array}$$

On pose

$$X_{f,g,h,k} = \{(i,p,q) \in \mathbf{Z}^3 : i+p+q = k, f_i \times g_p \times h_q \neq 0\}.$$

Cet ensemble est fini car il est inclus dans

$$\{(i,p,q)\in \mathbf{Z}^3 : \begin{array}{l} \nu_f \leq i \leq k-\nu_g-\nu_h \\ \nu_g \leq p \leq k-\nu_h-\nu_f \\ \nu_h \leq q \leq k-\nu_f-\nu_g\}. \end{array}$$

Si $X_{f,g,h,k}=\emptyset$ alors $(f*(g*h))_k = 0 = (f*g)*h))_k$. Supposons $X_{f,g,h,k}\neq\emptyset$

Soit $(i,p,q)\in X_{f,g,h,k}$. On a $\nu_f\leq i$, $\nu_g\leq p$ et $\nu_h\leq q$. Puisque $g_p\times h_q\neq 0$ on a $(p,q)\in X_{g,h,p+q}=X_{g,h,j}$ avec $j=p+q=k-i$. De plus $\nu_g+\nu_h\leq j\leq k-\nu_f$, $\nu_f\leq i=k-j\leq k-\nu_g-\nu_h$ et $i+j=k$ donc $(i,j)\in X_{f,g*h,k}$. Ainsi si $(i,p,q)\in X_{f,g,h,k}$ il existe $j\in\mathbf{Z}$ tel que $(i,j)\in X_{f,g*h,k}$ et $(p,q)\in X_{g,h,j}$. Ceci prouve que

$$(f*(g*h))_k = \sum_{(i,p,q)\in X_{f,g,h,k}} f_i\times g_p\times h_q.$$

On considère encore $(i,p,q)\in X_{f,g,h,k}$. On a $\nu_f\leq i$, $\nu_g\leq p$ et $\nu_h\leq q$. Puisque $f_i\times g_p\neq 0$ donc $(i,p)\in X_{f,g,i+p}=X_{f,g,j'}$ avec $j'=i+p=k-q$. De plus $\nu_f+\nu_g\leq j'\leq k-\nu_h$, $\nu_h\leq q=k-j'\leq k-\nu_f-\nu_g$ et $j'+q=k$ donc $(j',q)\in X_{f*g,h,k}$. Ainsi si $(i,p,q)\in X_{f,g,h,k}$ existe $j'\in\mathbf{Z}$ tel que $(j',q)\in X_{f*g,h,k}$ et $(i,p)\in X_{f,g,j'}$. Ceci prouve que

$$((f*g)*h)_k = \sum_{(i,p,q)\in X_{f,g,h,k}} f_i\times g_p\times h_q.$$

Ainsi

$$(f*(g*h))_k = \sum_{(i,p,q)\in X_{f,g,h,k}} f_i\times g_p\times h_q = ((f*g)*h)_k.$$

La loi $*$ est associative.

X.36. proposition *La loi $*$ admet un neutre, la fonction $\mathbf{1_F}$.*

X.37. preuve Soit $g\in\mathbf{F}$. On pose $f=\mathbf{1_F}$. Soit $k\in\mathbf{Z}$. On a $\nu_f=0$. Donc $\nu_f+\nu_g=\nu_g$. Si $k<\nu_g$ alors $(f*g)_k=0$. Puisque $\nu_f=0$, $(f*g)_{\nu_g}=f_0\times g_{\nu_g}=g_{\nu_g}$. Supposons $\nu_g<k$. On a $f_0=1$ et si $i\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$ alors $f_i=0$. Donc

$$\begin{aligned} (f*g)_k &= \sum_{i=0}^{k-\nu_f-\nu_g} f_{\nu_f+i}\times g_{k-\nu_f-i} \\ &= \sum_{i=0}^{k-\nu_g} f_i\times g_{k-i} \\ &= (f_0\times g_k)+(\sum_{i=1}^{k-\nu_g} f_i\times g_{k-i}) \\ &= g_k. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\mathbf{1_F} * g = g$. Puisque $*$ est commutative il vient $g * \mathbf{1_F} = g$. Ainsi $\mathbf{1_F}$ est le neutre de $*$.

X.38. corollaire $(\mathbf{F}, +, *)$ *est un anneau commutatif.*

On suppose maintenant que $(\mathbf{A}, +, \times)$ est un anneau commutatif noté $(\mathbf{K}, +, \times)$.

X.39. proposition $(\mathbf{F}, +, *)$ *est un corps commutatif.*

X.40. preuve Vu les résultats précédents il suffit de montrer que si $f \in \mathbf{F}$ est non nulle alors il possède un inverse pour $*$. Puisque $*$ est commutative il suffit de montrer qu'il existe $g \in \mathbf{F}$ telle que $f * g = \mathbf{1_F}$.

Soit $f \in \mathbf{F}$ non nulle. On a $f_{\nu_f} \neq 0$. On considère $\phi \in (\mathbf{K^N} \times \mathbf{N})^{(\mathbf{K^N} \times \mathbf{N})}$ telle que si $(h, n) \in (\mathbf{K^N} \times \mathbf{N})$ alors $\phi(h, n) = (\alpha(h, n), n + 1)$ avec $\alpha(h, n)$ qui vérifie :
- si $n < k$ alors $(\alpha(h, n))_k = 0$
- si $0 \leq k < n$ alors $(\alpha(h, n))_k = h_k$
- si $k = n$ alors

$$(\alpha(h, n))_k = -\frac{1}{f_{\nu_f}} \times \left(\sum_{i=1}^{k} f_{\nu_f + i} \times h_{k-i} \right).$$

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite récurrente associée à ϕ de premier terme le couple $(\mathbf{1_F}, 0)$. Puisque pour $k, n \in \mathbf{N}$ tels que $0 \leq k < n$ on a $(\alpha(h, n))_k = h_k$ on en déduit que pour tout $k, n \in \mathbf{N}$ tels que $k < n$ on a $x_n(k) = x_k(k)$. Donc si $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ et si $i \in \mathbf{N}$ et $1 \leq i \leq k$ alors $x_{k-1}(k - i) = x_{k-i}(k - i)$ et donc

$$\begin{aligned} x_k(k) &= -\frac{1}{f_{\nu_f}} \times \left(\sum_{i=1}^{k} f_{\nu_f + i} \times x_{k-1}(k - i) \right) \\ &= -\frac{1}{f_{\nu_f}} \times \left(\sum_{i=1}^{k} f_{\nu_f + i} \times x_{k-i}(k - i) \right). \end{aligned}$$

On considère la suite $y \in \mathbf{K^N}$ définie par $y_n = x_n(n)$ si $n \in \mathbf{N}$. On a $y_0 = \dfrac{1}{f_{\nu_f}}$ et si $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ on a

$$y_n = -\frac{1}{f_{\nu_f}} \times \left(\sum_{i=1}^{n} f_{\nu_f + i} \times y_{n-i} \right).$$

Soit $g \in \mathbf{F}_{\nu_f}$ définie par $g_k = 0$ si $k < -\nu_f$ et $g_k = y_{k+\nu_f}$ si $-\nu \leq k$. Par construction on a :

- $\nu_g = -\nu_f$ donc $\nu_{f*g} = 0$
- $(f * g)_0 = f_{\nu_f} \times g_{-\nu_f} = 1$
- si $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $k = n - \nu_f$ alors

$$g_k = -\frac{1}{f_{\nu_f}} \times \left(\sum_{i=1}^{k-\nu_f} f_{\nu_f+i} \times g_{k-\nu_f-i} \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} (f * g)_n &= \sum_{i=0}^{k} f_{\nu_f+i} \times g_{k-\nu_f-i} \\ &= f_{\nu_f} \times g_k + \left(\sum_{i=0}^{k} f_{\nu_f+i} \times g_{k-\nu_f-i} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent $f * g = \mathbf{1_F}$. Puisque $*$ est commutative g est l'inverse de f pour $*$.

On suppose maintenant que $\mathbf{K}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ tel que $(\mathbf{K}, +, \times, \leq)$ soit un corps commutatif totalement ordonné.

X.41. définition On définit sur $\mathbf{F}$ la relation $\leq_{\mathbf{F}}$ suivante. Si $f, g \in \mathbf{F}$ on a $f \leq_{\mathbf{F}} g$ si $f = g$ ou si $0 < (g - f)_{\nu_{g-f}}$.

X.42. proposition *La relation* $\leq_{\mathbf{F}}$ *est une relation d'ordre et* $(\mathbf{F}, +, *, \leq_{\mathbf{F}})$ *est un corps commutatif totalement ordonné.*

X.43. preuve

Soit $f, g, h \in \mathbf{F}$.

Si $f \leq_{\mathbf{F}} g$ alors $f = g$ ou $0 < (g - f)_{\nu_{g-f}}$. Si $f = g$ alors $f + h = g + h$ donc $(f + h) \leq_{\mathbf{F}} (g + h)$. Si $0 < (g - f)_{\nu_{g-f}}$ alors $(g + h) - (f + h) = g - f$ donc $0 < ((g+h) - (f+h))_{\nu_{(g+h)-(f+h)}}$ et $(f+h) \leq_{\mathbf{F}} (g+h)$. Donc si $f \leq_{\mathbf{F}} g$ alors $(f + h) \leq_{\mathbf{F}} (g + h)$. La relation $\leq_{\mathbf{F}}$ est compatible avec $+$.

Si $0 \leq_F h$ alors $h = 0$ ou $0 < h_{\nu_h}$. Si $h = 0$ et $f \leq_{\mathbf{F}} g$ alors $h*f = h*g = 0$ et $(h * f) \leq_{\mathbf{F}} (h * g)$. Si $0 < h_{\nu_h}$ et si $f = g$ alors $h * f = h * g$ et $(h * f) \leq_{\mathbf{F}} (h * g)$. Si $0 < h_{\nu_h}$ et $0 < (g - f)_{\nu_{g-f}}$ alors $(h * g) - (h * f) = h * (g - f)$, $\nu_{h*(g-f)} = \nu_h + \nu_{g-f}$ et

$$0 < (h_{\nu_h} \times (g - f)_{\nu_{g-f}}) = ((h * g) - (h * f))_{\nu_{((h*g)-(h*f))}}$$

donc $(h * f) \leq_{\mathbf{F}} (h * g)$. Ainsi $\leq_{\mathbf{F}}$ est compatible avec l'action de $*$ par des éléments supérieurs ou égaux à 0.

On a $f \leq_{\mathbf{F}} f$ par définition. La relation $\leq_{\mathbf{F}}$ est réflexive.

On suppose que $f \leq_{\mathbf{F}} g$ et que $f \neq g$. Alors $0 < (g-f)_{\nu_{g-f}}$. Or $f - g = -(g-f)$ donc $\nu_{f-g} = \nu_{g-f}$ et $(f-g)_{\nu_{f-g}} = -(g-f)_{\nu_{g-f}}$. Ainsi $(f-g)_{\nu_{f-g}} < 0$. Par conséquent $g \leq_{\mathbf{F}} f$ n'est pas vérifiée. La relation $\leq_{\mathbf{F}}$ est antisymétrique.

On suppose que $f \leq_{\mathbf{F}} g$ et que $g \leq_{\mathbf{F}} h$. Si $f = g$ ou $g = h$ alors on a$f \leq_{\mathbf{F}} h$. On suppose que $f \neq g$ et $g \neq h$. On donc $0 < (g-f)_{\nu_{g-f}}$ et $0 < (h-g)_{\nu_{h-g}}$. Si $\nu_{g-f} < \nu_{h-g}$ alors $\nu_{h-f} = \nu_{g-f}$ et puisque $h - f = (g-f) + (h-g)$ il vient $0 < (h-f)_{\nu_{h-f}} = (g-f)_{\nu_{g-f}}$ donc $f \leq_{\mathbf{F}} h$. Si $\nu_{h-g} < \nu_{g-f}$ alors $\nu_{h-f} = \nu_{h-g}$ et puisque $h - f = (g-f) + (h-g)$ il vient $0 < (h-f)_{\nu_{h-f}} = (h-g)_{\nu_{h-g}}$ donc $f \leq_{\mathbf{F}} h$. Si $\nu_{g-f} = \nu_{h-g}$ alors $0 < (g-f)_{\nu_{g-f}} + (h-g)_{\nu_{h-g}}$ donc $\nu_{h-f} = \nu_{g-f} = \nu_{h-g}$ et $0 < (h-f)_{\nu_{h-f}}$. Ainsi $f \leq_{\mathbf{F}} h$. La relation $\leq_{\mathbf{F}}$ est transitive.

De plus si $f, g \in \mathbf{F}$ alors soit $f = g$ et donc $f \leq_{\mathbf{F}} g$ soit $f \neq g$. Dans ce cas $\nu_{g-f} \neq 0$ et $(g-f)_{\nu_{g-f}} \neq 0$. Par conséquent soit $0 < (g-f)_{\nu_{g-f}}$ et $f \leq_{\mathbf{F}} g$ soit $(g-f)_{\nu_{g-f}} < 0$ et alors $\nu_{f-g} = \nu_{g-f}$, $0 < -(g-f)_{\nu_{g-f}} = (f-g)_{\nu_{f-g}}$ et $g \leq_{\mathbf{F}} f$.

On vient de prouver que la relation $\leq_{\mathbf{F}}$ est une relation d'ordre total compatible avec $+$ et l'action de $*$ par des éléments supérieurs ou égaux à 0 et donc $(\mathbf{F}, +, *, \leq_{\mathbf{F}})$ est un corps commutatif totalement ordonné

Maintenant on suppose que $\mathbf{K}$ est archimédien.

X.44. proposition *Le corps* $\mathbf{F}$ *est non archimédien.*

X.45. preuve

Soit $x \in \mathbf{F}$ telle que $x_k = 0$ si $k \in \mathbf{Z} \setminus \{1\}$ et $x_1 = 1$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq_{\mathbf{F}} n\mathbf{1}_{\mathbf{F}} \leq_{\mathbf{F}} x$.

X.46. corollaire *Le corps* $\mathbf{F}$ *ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure.*

X.47. preuve Un corps commutatif totalement ordonné qui possède la propriété de la borne supérieure est archimédien. Puisque $\mathbf{F}$ n'est pas archimédien il ne possède pas la propriété de la borne supérieure.

X.48. proposition *Soit* $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbf{N}}$. *La suite* u *est de Cauchy si et seulement si pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}$ *il existe* $N \in \mathbf{N}$ *tel que si* $(n, m, k) \in \mathbf{N}^2 \times \mathbf{Z}$ *est tel que* $N \leq n, m$ *et* $k \leq \nu$ *alors* $u_n(k) - u_m(k) = 0$.

X.49. preuve Soit $\nu \in \mathbf{Z}$. On note x^{ν} l'élément de $\mathbf{F}$ tel que $x_k = 0$ si $k \in \mathbf{Z} \setminus \{\nu\}$ et $x_1^{\nu} = 1$. On a $x^{\nu} \neq 0$ et $0 \leq_{\mathbf{F}} x^{\nu}$.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbf{N}}$. Si u vérifie $|u| \leq_{\mathbf{F}} x^{\nu+1}$ alors pour tout $k \in \mathbf{Z}$ tel que $k \leq \nu$ on $u_n(k) = 0$. Inversement si pour tout $k \in \mathbf{Z}$ tel que $k \leq \nu$ on

$u_n(k) = 0$ alors u vérifie $|u| \leq_{\mathbf{F}} x^\nu$.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbf{N}}$. On suppose que u est de Cauchy. Soit $\nu \in \mathbf{Z}$. Puisque $0 \leq_{\mathbf{F}} \varepsilon = x^{\nu+1}$ et $\varepsilon = x^{\nu+1} \neq 0$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $(n, m) \in \mathbf{N}^2$ tel que $N \leq n, m$ on a $|u_n - u_m| \leq_{\mathbf{F}} x^{\nu+1}$ et donc pour tout $k \in \mathbf{Z}$ tel que $k \leq \nu$ on a $u_n(k) - u_m(k) = (u_n - u_m)(k) = 0$.

Inversement on suppose que pour tout $\nu \in \mathbf{Z}$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $(n, m, k) \in \mathbf{N}^2 \times \mathbf{Z}$ est tel que $N \leq n, m$ et $k \leq \nu$ alors $u_n(k) - u_m(k) = 0$. Donc il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $(n, m) \in \mathbf{N}^2$ est tel que $N \leq n, m$ alors $|u_n - u_m| \leq_{\mathbf{F}} x^\nu$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{F}$ non nul et tel que $0 \leq_{\mathbf{F}} \varepsilon$. Soit alors $\nu \in \mathbf{Z}$ tel que $\nu_\varepsilon < \nu$. On a alors $0 \leq_{\mathbf{F}} x^\nu \leq_{\mathbf{F}} \varepsilon$. Donc il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $(n, m) \in \mathbf{N}^2$ est tel que $N \leq n, m$ alors $|u_n - u_m| \leq_{\mathbf{F}} x^\nu \leq_{\mathbf{F}} \varepsilon$. La suite est donc de Cauchy.

X.50. proposition $\mathcal{C}(\mathbf{F}) = \mathcal{L}(\mathbf{F})$.

X.51. preuve Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy. Donc pour tout $\nu \in \mathbf{Z}$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $(n, m, k) \in \mathbf{N}^2 \times \mathbf{Z}$ est tel que $N \leq n, m$ et $k \leq \nu$ alors $u_n(k) - u_m(k) = 0$. Si $\nu \in \mathbf{Z}$ on note I_ν l'ensemble des $N \in \mathbf{N}$ tel que si $(n, m, k) \in \mathbf{N}^2 \times \mathbf{Z}$ est tel que $N \leq n, m$ et $k \leq \nu$ alors $u_n(k) - u_m(k) = 0$. C'est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{N}$ car la suite est de Cauchy et $I_{\nu+1} \subset I_\nu$. Donc I_ν admet un plus petit élément N_ν et $N_\nu \leq N_{\nu+1}$.

On considère $v \in \mathbf{K}^{\mathbf{Z}}$ définie par $v_\nu = u_{N_\nu}(\nu)$ si $\nu \in \mathbf{Z}$. Si $k \in \mathbf{Z}$ est tel que $k < \nu_{u_{N_0}}$ alors $u_{N_0}(k) = 0$ par définition de $\nu_{u_{N_0}}$ et $u_n(k) - u_{N_0}(k) = 0$ par définition de N_0. Donc $v \in \mathbf{F}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{F}$ non nul et tel que $0 \leq_{\mathbf{F}} \varepsilon$. Soit alors $\nu \in \mathbf{Z}$ tel que $\nu_\varepsilon < \nu$. On a alors $0 \leq_{\mathbf{F}} x^\nu \leq_{\mathbf{F}} \varepsilon$. Par définition de N_ν, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $N_\nu \leq n$ et pour tout $k \in \mathbf{Z}$ tel que $k \leq \nu$ on a $N_k \leq N_\nu \leq n$ et donc

$$u_n(k) - v_{N_k}(k) = u_n(k) - u_{N_k}(k) = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $N_\nu \leq n$ on a donc $|u_n - v| \leq_{\mathbf{F}} x^\nu \leq_{\mathbf{F}} \varepsilon$.

Ceci prouve que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et a pour limite v.