Inversion complexe et cocyclicité

Jean-Marie Lion
Université de Rennes 1

Brève introduction aux nombres complexes

L'addition et la multiplication dans $\mathbf{C}$ sont définies de la façon suivante : si $z = x + iy \in \mathbf{C}$ et $z' = x' + iy' \in \mathbf{C}$ alors

$$z + z' = (x + x') + i(y + y') \text{ et } zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx').$$

L'ensemble $\mathbf{C}$ des complexes muni des lois $+$ et $\times$ est un corps commutatif. En particulier si $z \neq 0$ alors son inverse $\frac{1}{z}$ est

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Si $z = x + iy \in \mathbf{C}$ on note $\overline{z}$ et on appelle conjugé de z le complexe

$$\overline{z} = x - iy$$

et on note $|z|$ et on appelle module de z le réel positif ou nul défini par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Si $z \neq 0$ alors

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

La conjugaison est une involution et c'est un isomorphisme du corps $\mathbf{C}$. L'application qui à $x \in \mathbf{R}$ associe le complexe $z = x + 0i$ de partie réelle x et de partie imaginaire nulle est un morphisme de corps injectif qui permet d'identifier $\mathbf{R}$ à un sous corps de $\mathbf{C}$, le sous corps des complexes invariants par conjugaison. Ce sous-corps est appelé axe réel.

Puisque $\mathbf{C}$ est un corps c'est aussi une $\mathbf{C}$-droite vectorielle et une $\mathbf{C}$-droite affine. Mais l'ensemble des complexes peut être également considéré comme un plan vectoriel euclidien orienté ou comme un plan affine euclidien orienté :

$(0,(1,i))$ est un repère orthonormé direct. Si $z = x + iy \in \mathbf{C}$ alors le module $|z|$ de z peut être vu comme la norme du vecteur z (si $\mathbf{C}$ est considéré comme un plan vectoriel euclidien orienté) et le module $|z - z'|$ peut être vu comme la distance entre les points z et z' (si $\mathbf{C}$ est considéré comme un plan affine euclidien orienté). La conjugaison est identifiée à la réflexion par rapport à l'axe réel.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté et soit $(O, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$ un repère orthonormé direct de ce plan. L'application qui au point M de coordonnées (x, y) associe le nombre complexe $z_M = x + iy$ est un isomorphisme affine. Le complexe z_M s'appelle affixe de M.

L'intérêt de la représentation complexe d'un plan affine euclidien orienté réside dans les possibilités calculatoires, algébriques, des nombres complexes. En particulier les applications affines complexes non constantes sont les similitudes directes : si $a \in \mathbf{C}^*$ et si $b \in \mathbf{C}$ alors l'application $z \in \mathbf{C} \mapsto az+b$ peut être considérée soit comme une application affine complexe (c'est pratique pour les calculs) soit comme une similitude directe (c'est pratique pour la géométrie). En effet si $a = \alpha + i\alpha' \in \mathbf{C}^*$ alors $\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha' \\ \alpha' & \alpha \end{pmatrix}$ est la matrice d'une similitude directe et si $b = \beta + i\beta' \in \mathbf{C}$ et $z = x + iy \in \mathbf{C}$ alors $z' = az + b = x' + iy'$ est donné par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha' \\ \alpha' & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \beta' \end{pmatrix}.$$

En particulier un nombre complexe représente une similitude directe de centre l'origine. Une telle similitude est caractérisée par deux nombres : son rapport qui est un réel strictement positif et la mesure de l'angle de rotation associée et qui est déterminée modulo 2π. Ces deux nombres caractérisent également le complexe non nul associé à la similitude. Si $z \in \mathbf{C}$ alors on écrit

$$z = re^{i\theta}$$

avec $r = |z|$ et θ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{1, z})$ (ici 1 et z sont vus comme des vecteurs). Si $z \neq 0$ le nombre θ (défini modulo 2π) s'appelle argument de z. Le couple (r, θ) associé à z s'appelle coordonnées polaires de z : c'est la représentation par module et argument du complexe non nul z. La similitude de centre l'origine à laquelle z est associé a pour rapport r et pour mesure de l'angle de rotation associée θ. La composée de deux similitudes directes de centre l'origine est une similitude directe de rapport le produit des rapports et de mesure d'angle la somme des mesures des angles. Cet énoncé admet la formulation complexe suivante. Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ alors

$$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}.$$

On a en particulier la formule suivante : si $z = re^{i\theta}$ est un complexe non nul alors son inverse est

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

De plus si a, b et z sont trois complexes distincts alors l'argument de

$$\frac{z-a}{z-b}$$

est une mesure de l'angle orienté fait par les vecteurs $b - z$ et $a - z$.

Cercles dans $\mathbf{C}$ de centre 0 ou passant par 0 et droites de $\mathbf{C}$

Dans un plan affine, une droite affine δ est souvent donnée par son équation cartésienne relativement à un repère caratésien : $ax + by + c = 0$. Si la droite δ appartient à un plan affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ qu'on identifie par passage aux affixes à $\mathbf{C}$ il peut être pratique de choisir une autre représentation de la droite δ. Si z_0 et z_1 sont deux complexes distincts de δ alors

$$\delta = \{z = z_0 + t(z_1 - z_0) : t \in \mathbf{R}\}.$$

Il peut être aussi intéressant de considérer la représentation polaire d'une droite δ :

- $0 \in \delta$. Soit $z_0 \in \delta^*$. Il existe $r_0 > 0$ et θ_0 tels que $z = r_0e^{i\theta_0}$. La droite δ est l'ensemble des complexes $z = re^{i\theta_0}$ avec $r \in \mathbf{R}$:

  $$\delta = \{r_0e^{i\theta_0} : r \in \mathbf{R}\}.$$

  La demi-droite $]0, z_0)$ est l'ensemble des complexes $z = re^{i\theta_0}$ avec $r > 0$:

  $$]0, z_0) = \{r_0e^{i\theta_0} : r > 0\}.$$

  La demi-droite $]0, -z_0)$ est l'ensemble des complexes $z = re^{i(\theta_0+\pi)}$ avec $r > 0$:

  $$]0, -z_0) = \{r_0e^{i(\theta_0+\pi)} : r > 0\}.$$

– $0 \notin \delta$. Soit z_0 le projeté orthogonal de 0 sur δ. Il existe $r_0 > 0$ et θ_0 tels que $z = r_0 e^{i\theta_0}$. Un complexe non nul $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ appartient à δ si et seulement si le triangle $(0, z_0, z)$ est rectangle en z_0 c'est à dire si et seulement si $r_0 = \cos(\theta - \theta_0)r$. La droite δ est l'ensemble des complexes $z = re^{i\theta_0}$ avec $r = \dfrac{r_0}{\cos(\theta - \theta_0)}$ et $\theta \in]\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2}[$:

$$\delta = \left\{ re^{i\theta} : r = \frac{r_0}{\cos(\theta - \theta_0)},\ \theta \in]\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2}[\right\}.$$

Le point z_0 sépare la droite en deux demi-droites, la demi-droite

$$\delta^+ = \left\{ re^{i\theta} : r = \frac{r_0}{\cos(\theta - \theta_0)},\ \theta \in]\theta_0, \theta_0 + \frac{\pi}{2}[\right\}$$

et la demi-droite

$$\delta^- = \left\{ re^{i\theta} : r = \frac{r_0}{\cos(\theta - \theta_0)},\ \theta \in]\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0[\right\}.$$

Dans un plan affine euclidien orientée $\mathcal{E}$ un cercle est caractérisé par son centre et son rayon. Si le plan $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$ alors le cercle de rayon r_0 et de centre C_0 de coordonnées (x_0, y_0) a pour équation cartésienne $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Identifions comme précédemment $\mathcal{E}$ et $\mathbf{C}$. Si $\mathcal{C}$ est un cercle de centre c_0 et de rayon r_0 alors

$$\mathcal{C} = \{z = c_0 + r_0 e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi[\}.$$

La représentation polaire d'un cercle $\mathcal{C}$ de rayon r_0 centré en 0 est

$$\mathcal{C} = \{r_0 e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi[\}.$$

Considérons maintenant un cercle $\mathcal{C}$ de centre $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ différent de 0 et qui passe par 0 c'est à dire de rayon r_0. Le segment $[0, 2z_0] = [0, 2e^{i\theta_0}]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$. C'est pourquoi $z = re^{i\theta} \in \mathbf{C}$ avec $r > 0$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si le triangle $(0, 2z_0, z)$ est rectangle en z c'est à dire si $r = 2\cos(\theta - \theta_0)r_0$. Le cercle $\mathcal{C}$ admet comme représentation polaire

$$\mathcal{C} = \{re^{i\theta} : r = 2\cos(\theta - \theta_0)r_0, \theta \in [\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2}[\}.$$

Le segment $[0, 2z_0]$ sépare le cercle $\mathcal{C}$ en deux demi-cercles, le demi-cercle

$$\mathcal{C}^+ = \{re^{i\theta} : r = 2\cos(\theta - \theta_0)r_0, \theta \in]\theta_0, \theta_0 + \frac{\pi}{2}[\}$$

et le demi-cercle

$$\mathcal{C}^- = \{re^{i\theta} : r = 2\cos(\theta - \theta_0)r_0, \theta \in]\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0[\}.$$

Les autres cercles de $\mathbf{C}$ n'admettent pas de représentation polaire aussi simple.

L'inversion $z \mapsto \dfrac{1}{z} = z^{-1}$ associe au complexe non nul $z = re^{i\theta}$ le complexe $z^{-1} = \dfrac{z}{|z|^2} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$. Fixons $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$. On déduit des représentations polaires des cercles de centre 0 ou passant par 0 et des droites les résultats suivants.

- L'image par l'inversion de la demi-droite $]0, z_0)$ est la demi-droite $]0, \frac{1}{z_0})$ et l'image de $\mathbf{R}z_0 \setminus \{0\}$ (la droite vectorielle privée de 0 et qui passe par z_0) par l'inversion est $\mathbf{R}\frac{1}{z_0} \setminus \{0\}$ (la droite vecotorielle privée de 0 et qui passe par $\frac{1}{z_0}$).
- L'image par l'inversion de la droite

  $$\delta = \left\{re^{i\theta} : r = \frac{r_0}{\cos(\theta - \theta_0)},\ \theta \in]\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2}[\right\}$$

  est le cercle privé de l'origine

  $$\mathcal{C}^* = \{re^{i\theta} : r = \cos(\theta + \theta_0)\frac{1}{2r_0}, \theta \in] - \theta_0 - \frac{\pi}{2}, -\theta_0 + \frac{\pi}{2}[\}.$$

  L'image par l'inversion de la demi-droite

  $$\delta^+ = \left\{re^{i\theta} : r = \frac{r_0}{\cos(\theta - \theta_0)},\ \theta \in]\theta_0, \theta_0 + \frac{\pi}{2}[\right\}$$

  est le demi-cercle

  $$\mathcal{C}^- = \{re^{i\theta} : r = \cos(\theta + \theta_0)\frac{1}{2r_0}, \theta \in] - \theta_0 - \frac{\pi}{2}, -\theta_0[\}.$$

  L'image par l'inversion de la demi-droite

  $$\delta^- = \left\{re^{i\theta} : r = \frac{r_0}{\cos(\theta - \theta_0)},\ \theta \in]\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0[\right\}$$

est le demi-cercle

$$\mathcal{C}^+ = \{re^{i\theta} : r = \cos(\theta + \theta_0)\frac{1}{2r_0}, \theta \in] - \theta_0, -\theta_0 + \frac{\pi}{2}[\}.$$

– L'image par l'inversion du cercle centré à l'origine et de rayon r_0 est le cercle centré à l'origine et de rayon $\frac{1}{r_0}$.
– L'image par l'inversion du cercle privé de l'origine

$$\mathcal{C}^* = \{re^{i\theta} : r = \cos(\theta - \theta_0)r_0, \theta \in]\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2}[\}$$

est la droite

$$\delta = \left\{re^{i\theta} : r = \frac{r_0}{2\cos(\theta + \theta_0)},\ \theta \in]\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2}[\right\}.$$

L'image par l'inversion du demi-cercle

$$\mathcal{C}^+ = \{re^{i\theta} : r = \cos(\theta - \theta_0)r_0, \theta \in]\theta_0, \theta_0 + \frac{\pi}{2}[\}$$

est la demi-droite

$$\delta^- = \left\{re^{i\theta} : r = \frac{r_0}{2\cos(\theta + \theta_0)},\ \theta \in]\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0[\right\}.$$

L'image par l'inversion du demi-cercle

$$\mathcal{C}^- = \{re^{i\theta} : r = \cos(\theta - \theta_0)r_0, \theta \in]\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0[\}$$

est la demi-droite

$$\delta^+ = \left\{re^{i\theta} : r = \frac{r_0}{2\cos(\theta + \theta_0)},\ \theta \in]\theta_0, \theta_0 + \frac{\pi}{2}[\right\}.$$

Il reste à considérer l'image d'un cercle quelconque par l'inversion. C'est l'objet de la partie suivante.

Cocyclicité et inversion

Soit $c \in \mathbf{C}$ $r > 0$ et $\mathbf{C}$ le cercle de centre c et de rayon r :

$$\mathcal{C} = \{z = c + re^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi[\}.$$

Soit a et b deux points distincts de $\mathcal{C}$. Il existe α et $\beta \in]\alpha, \alpha+2\pi[$ tels que $a = c + re^{i\alpha}$ et $b = c + re^{i\beta}$. On a

$$\mathcal{C} = \{z = c + re^{i\theta} : \theta \in [\alpha, \alpha+2\pi[\}.$$

Le segment $[a, b]$ sépare le cercle en deux arcs de cercles, l'arc

$$C^- = \{z = c + re^{i\theta} : \theta \in]\alpha, \beta[\}$$

et l'arc

$$C^+ = \{z = c + re^{i\theta} : \theta \in]\beta, \alpha+2\pi[\}.$$

Soit $z = c + re^{i\theta} \in \mathcal{C} \setminus \{a, b\} : \theta \in]\alpha, \beta[\cup]\beta, \alpha+\pi[$.
On a

$$\begin{aligned}
\frac{z-b}{z-a} &= \frac{e^{i\theta} - e^{i\beta}}{e^{i\theta} - e^{i\alpha}} \\
&= \frac{e^{\frac{i}{2}(\theta-\beta)} - e^{-\frac{i}{2}(\theta-\beta)}}{e^{\frac{i}{2}(\theta-\alpha)} - e^{-\frac{i}{2}(\theta-\alpha)}} \cdot \frac{e^{\frac{i}{2}(\theta+\beta)}}{e^{\frac{i}{2}(\theta+\alpha)}} \\
&= \frac{\sin(\frac{1}{2}(\theta-\beta))}{\sin(\frac{1}{2}(\theta-\alpha))} \cdot e^{\frac{i}{2}(\beta-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Si $z \in \mathcal{C}^-$ (c'est à dire si $\theta \in]\alpha, \beta[$) alors

$$-\pi < \frac{1}{2}(\theta-\beta)) < 0 \text{ et } 0 < \frac{1}{2}(\theta-\alpha)) < \pi.$$

Par conséquent $\dfrac{\sin(\frac{1}{2}(\theta-\beta))}{\sin(\frac{1}{2}(\theta-\alpha))}$ est strictement négatif et l'argument de $\dfrac{z-b}{z-a}$ est égal à $\pi + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ modulo 2π (c'est à dire à $\pi+$la mesure de l'angle orienté fait par $a-c$ et $\frac{1}{2}(a+b)-c$).

Si $z \in \mathcal{C}^+$ (c'est à dire si $\theta \in]\beta, \alpha+2\pi[$) alors

$$0 < \frac{1}{2}(\theta-\beta)) < \pi \text{ et } 0 < \frac{1}{2}(\theta-\alpha)) < \pi.$$

Par conséquent $\dfrac{\sin(\frac{1}{2}(\theta-\beta))}{\sin(\frac{1}{2}(\theta-\alpha))}$ est strictement positif et l'argument de $\dfrac{z-b}{z-a}$ est égal à $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ modulo 2π (c'est à dire à la mesure de l'angle orienté fait par $a-c$ et $\frac{1}{2}(a+b)-c$).

Ainsi si $z \in \mathcal{C} \setminus \{a, b\}$ alors l'argument de $\dfrac{z-b}{z-a}$ est égal à $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ modulo π.

Il reste à vérifier que si $z \notin \mathcal{C}$ alors l'argument de $\dfrac{z-b}{z-a}$ est différent de $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ modulo π. Si z est aligné avec a et b alors l'argument de $\dfrac{z-b}{z-a}$ est 0 ou π. Il est différent de $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ qui est dans $]0, \pi[$. Si z n'est pas aligné avec a et b alors le centre c' du cercle qui contient a, b et z est un point de la médiatrice du segment $[a, b]$ qui est différent de c. Le calcul précédent montre que l'argument de $\dfrac{z-b}{z-a}$ est égal à la mesure de l'angle orienté fait par $a-c'$ et $\frac{1}{2}(a+b)-c'$. Or, puisque c' et c sont deux points différents de la médiatrice du segment $[a, b]$, la mesure de l'angle orienté fait par $a-c'$ et $\frac{1}{2}(a+b)-c'$ diffère (modulo π) de la mesure de l'angle orienté fait par $a-c$ et $\frac{1}{2}(a+b)-c$. Par conséquent l'argument de $\dfrac{z-b}{z-a}$ diffère (modulo π) de la mesure de l'angle orienté fait par $a-c$ et $\frac{1}{2}(a+b)-c$ c'est à dire de $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$.

On vient de prouver le critère de cocyclicité suivant. Soient a, b, z et z' quatre complexes distincts. On suppose que a, b et z ne sont pas alignés. On note $\mathcal{C}$ le cercle qui passe par a, b et z. On désigne par $\mathcal{C}_z^+$ l'arc de $\mathcal{C} \setminus \{a, b\}$ qui contient z et $\mathcal{C}_z^-$ l'arc de $\mathcal{C} \setminus \{a, b\}$ qui ne contient pas z. Soit $z' \in \mathbf{C} \setminus \{a, b\}$. Alors $z' \in \mathcal{C}_z^+$ si $\dfrac{z'-b}{z'-a}$ et $\dfrac{z-b}{z-a}$ ont même argument et $z' \in \mathcal{C}_z^-$ si les arguments de $\dfrac{z'-b}{z'-a}$ et $\dfrac{z-b}{z-a}$ diffèrent de π.

On considère quatre complexes non nuls et distincts a, b, z et z'. Alors

$$\frac{\dfrac{z-b}{z-a}}{\dfrac{z'-b}{z'-a}} = \frac{\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{z}-\frac{1}{a}}}{\frac{\frac{1}{z'}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{z'}-\frac{1}{a}}}.$$

Par conséquent $\dfrac{z'-b}{z'-a}$ et $\dfrac{z-b}{z-a}$ ont même argument si et seulement si $\frac{\frac{1}{z'}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{z'}-\frac{1}{a}}$ et $\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{z}-\frac{1}{a}}$ ont même argument. De même, les arguments de $\dfrac{z'-b}{z'-a}$ et $\dfrac{z-b}{z-a}$ diffèrent de π si et seulement si ceux de $\frac{\frac{1}{z'}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{z'}-\frac{1}{a}}$ et $\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{z}-\frac{1}{a}}$ diffèrent de π. On en déduit à l'aide du critère de cocyclicité que l'image par l'inversion d'un cercle qui évite l'origine est un cercle qui évite l'origine. L'image par l'inversion de l'arc de cercle d'extrémités a et b et qui passe par z et l'arc de cercle d'extrémités $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ et qui passe par $\frac{1}{z}$.

Puisque l'inversion est involutive on a les mêmes résultats pour les images réciproques.

Ceci s'étend à une homographie dès qu'on observe qu'une homographie h qui n'est pas elle-même une similitude directe est la composée $g \circ \dfrac{1}{z} \circ f$ où f et g sont des similitudes directes. En particulier les lignes de niveaux des fonctions $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right|$ et "argument de $\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right)$" sont des cercles ou des droites (éventuellement privés d'un ou deux points).