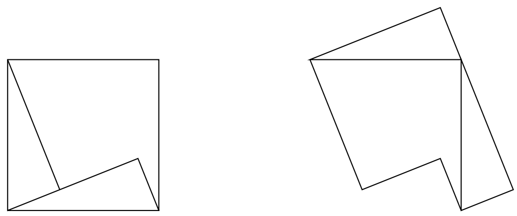
Université de Rennes 1
Préparation au Capes de mathématiques

Quelques exercices de géométrie

Jean-Marie Lion

Version du 15 novembre 2022



Des dessins, des schémas ou des représentations graphiques peuvent être utiles à la compréhension des énoncés, à la recherche de solutions et à l'explication des démonstrations.

1. Selon la légende on peut deviner l'âge auquel Diophante mourut en lisant une épitaphe inscrite sur sa tombe. Voici deux versions de cette épitaphe. Vous pourrez les comparer, déterminer la durée de vie de Diophante et réfléchir à l'importance d'un énoncé précis en géométrie comme en arithmétique.

version 1 (*version qu'on trouve dans une traduction du livre Hypatia d'Arnulf Zitelmannen (1988-1990)*)

La jeunesse de Diophante a duré un sixième de sa vie ; un douzième plus tard, ses joues se couvrirent de barbe. Il passa encore le septième de sa vie avant de prendre une épouse et, cinq ans après, il eut un enfant qui, après avoir atteint la moitié de l'âge de son père, périt d'une mort malheureuse. Son père lui survécut quatre ans. De tout cela, déduis l'âge de Diophante.

version 2 (*version en alexandrins d'Émile Fourrey dans ses Récréations mathématiques de 1905*)

Passant sous ce tombeau repose Diophante.
Ces quelques vers tracés par une main savante
Vont te faire connaître à quel âge il est mort.
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
Le sixième marqua le temps de son enfance ;
Le douzième fut pris par son adolescence.
Des septs parts de sa vie, une encore s'écoula,
Puis s'étant marié, sa femme lui donna
Cinq ans après un fils, qui, du destin sévère,
Reçut de jours hélas ! deux fois moins que son père.
De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut.
Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.

2. Soit (A,B,C) un triangle non dégénéré d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Montrer que les angles $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ sont égaux si et seulement si $AC = BC$.

3. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1, A et B deux points distincts de $\mathcal{C}$, γ un des deux arcs de cercle d'extrémités A et B et soit C l'intersection de la médiatrice de (A,B) et de γ. Soit $n > 3$.
1. Montrer que le triangle (A,B,C) est le triangle d'aire maximale parmi les triangles (A,B,M) avec $M \in \gamma$.
2. Montrer que le triangle (A,B,C) est le triangle de périmètre maximal parmi les triangles (A,B,M) avec $M \in \gamma$.
3. Quels sont les triangles d'aire maximale inscrits dans $\mathcal{C}$?
4. Quels sont les triangles de périmètre maximal inscrits dans $\mathcal{C}$?
5. Quels sont les polygones à n côtés d'aire maximale inscrits dans $\mathcal{C}$?
6. Quels sont les polygones à n côtés de périmètre maximal inscrits dans $\mathcal{C}$?

4. Soit (A,B,C) un triangle non dégénéré d'un plan affine euclidien. Construire à la règle et au compas les barycentres de (A,B,C) affectés des masses suivantes : $(1,2,0)$, $(0,-2,1)$, $(1,1,2)$, $(1,1,-4)$ et $(1,2,-1)$.

5. Soit (A,B,C) un triangle non dégénéré d'un plan affine euclidien.
1. Montrer qu'une application affine qui fixe globalement l'enveloppe convexe du triangle fixe globalement les trois sommets.
2. Décrire, en fonction des longueurs des côtés, le groupe des isométries (des isométries directes) qui fixent globalement les sommets du triangle.
3. Soit $B' \in (AB)$ et $C' \in (AC)$. À quelle condition (A,B,C) et (A,B',C') sont semblables.

6. Soit $(A_1,A_2,A_3,A_{4)})$ un rectangle non plat et $(B_1,B_2,B_3,B_{4)})$ un losange non plat. Si $i \in \mathbf{Z}/\mathbf{4}Z$ on note A'_i le milieu de (A_i,A_{i+1}) et B'_i le milieu de (B_i,B_{i+1}).
1. Montrer que $(A'_1,A'_2,A'_3,A'_{4)})$ est un losange et $(B'_1,B'_2,B'_3,B'_{4)})$ un rectangle.
2. Montrer que si une application affine préserve globalement $(A_1,A_2,A_3,A_{4)})$ alors elle préserve globalement (A'_1,A'_2,A'_3,A'_4).
3. Montrer que si de plus c'est une rotation qui envoie A_1 sur A_2 alors $(A_1,A_2,A_3,A_{4)})$ est un carré.
4. Montrer que si une application affine préserve globalement $(B_1,B_2,B_3,B_{4)})$ alors elle préserve globalement $(B'_1,B'_2,B'_3,B'_{4)})$.
5. Montrer que si de plus c'est une isométrie qui envoie B_1 sur B_2 alors $(B_1,B_2,B_3,B_{4)})$ est un carré.

7. On se place dans un plan affine euclidien.
1. Montrer que si (A,B,C) et (A',B',C') sont deux triangles non dégénérés et semblables d'aires respectives $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ alors

$$\mathcal{A}' = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 \mathcal{A}.$$

Soit (A,B,C) rectangle en C et H le pied de la hauteur qui passe par C.
2. Montrer que les triangles (A,B,C), (A,C,H) et (C,B,H) sont semblables.
3. En déduire que

$$\mathrm{A}ire(A,C,H) = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \mathrm{A}ire(A,B,C), \;\; \mathrm{A}ire(C,B,H) = \left(\frac{CB}{AB}\right)^2 \mathrm{A}ire(A,B,C).$$

4. Montrer que

$$\mathrm{A}ire(A,B,C) = \mathrm{A}ire(A,C,H) + \mathrm{A}ire(C,B,H).$$

5. En déduire que

$$AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

8. (Pythagore dans l'esprit de Clairaut, avec des transvections et d'après Eveilleau) On se place dans un plan affine euclidien orienté. Soit (A,B,C) un triangle direct, rectangle en A. Soit $\overrightarrow{u}$ tel que $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{AB}||$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})$ orthogonale directe. Soit $\overrightarrow{v}$ tel que $||\overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{AC}||$ et $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{AC})$ orthogonale indirecte. Soit $\overrightarrow{w}$ tel que $||\overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{BC}||$ et $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{BC})$ orthogonale indirecte. On considère $D = A + \overrightarrow{u}$, $E = B + \overrightarrow{u}$, $F = A + \overrightarrow{v}$, $G = C + \overrightarrow{v}$, $H = A + \overrightarrow{w}$, $I = B + \overrightarrow{w}$, $J = C + \overrightarrow{w}$, $K = (BC) \cap (AH)$ et $L = (IJ) \cap (AH)$.
1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation affine du plan affine euclidien conserve les aires.
2. Montrer que (B,A,D,E), (A,C,G,F) et (B,C,J,I) sont des carrés.
3. Montrer que (B,K,L,I) et (K,C,J,L) sont des rectangles dont la somme des aires est égale à l'aire du carré (B,C,J,I).
4. Montrer qu'il existe des transvections que l'on caractérisera qui envoient (B,K,L,I) et (K,C,J,L) sur (B,A,H,I) et (A,C,J,H).
5. Montrer qu'il existe des transvections que l'on caractérisera qui envoient (B,A,H,I) et (A,C,J,H) sur (B,A,D,E) et (A,C,G,F).
6. En déduire que $BC^2 = AB^2 + CA^2$.

9. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté muni d'un repère cartésien orthonormé direct. Soit $A, B \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{u}$ un vecteur de la direction de $\mathcal{P}$, λ et $\theta \in \mathbf{R}$. Exprimer à l'aide de coordonnées cartésiennes l'application obtenue en faisant agir la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ puis l'homothétie de rapport λ et de centre A et enfin la rotation d'angle θ et de centre B.

10. Soit (A,B,C) un triangle d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$.
1. Montrer que les trois droites médianes (qui relient les sommets A, B et C aux milieux A', B' et C' des côtés opposés) sont concourantes en un point G qui vérifie

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = 0.$$

2. Montrer que les bissectrices intérieures au triangle (A,B,C) sont concourantes en un point I.
3. Montrer que les trois médiatrices des bipoints (A,B), (B,C) et (C,A) sont concourantes en un point O.
4. Montrer que l'homothétie de centre G et de rapport -2 envoie A, B et C sur A'', B'' et C'' tels que A, B et C soient les milieux de (B'',C''), (C'',A'') et (A'',B'').
5. Montrer que les hauteurs du triangles (A,B,C) sont les médiatrices de (B'',C''), (C'',A'') et (A'',B'').
6. Conclure que ces hauteurs sont concourantes en un point H.
7. Exprimer $\overrightarrow{GH}$ en fonction de $\overrightarrow{GO}$.

11. Soit (A,B,C) un triangle d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$. On note I le centre de son cercle inscrit et A',B' et C' les images de I par les projections orthogonales sur les droites (BC), (CA) et (A,B). On note α, β et γ les angles aux sommets A, B et C du triangle (A,B,C). On pose $a = BC$, $b = CA$, et $c = AB$ et $h = IA'$. Enfin on note J le centre du cercle circonscrit et R son rayon : $R = JA = JB = JC$.
1. Vérifier que $h = IB' = IC'$ et que les droites (BC), (CA) et (A,B) sont perpendiculaires aux droites (IA'), (IB') et (IC').
2. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle (A,B,C) est égale à $\frac{1}{2}(a+b+c)h$.
3. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle (A,B,C) est égale à $\frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$.
4. Montrer que

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R.$$

5. En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle (A,B,C) est égale à $\dfrac{abc}{R}$.
6. Montrer que

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

7. En déduire que le carré de l'aire du triangle (A,B,C) vaut

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{16}(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4).$$

8. Factoriser cette expression en

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

9. En déduire que

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{(a+b+c)}}.$$

10. Montrer qu'à périmètre fixé le triangle équilatéral est le triangle d'aire maximale.

12. (Thalès par Euclide) Soit (A,B,C) un triangle non dégénéré d'un plan affine euclidien, $B' \in]A,B[$ et $C' \in]A,C[$ tels que (BC) et $(B'C')$ soient parallèles. On note H l'image de B par la projection orthogonale sur la droite (AC) et I l'image de B par la projection orthogonale sur la droite $(B'C')$. On note J l'image de C' par la projection orthogonale sur la droite (AB) et K l'image de C par la projection orthogonale sur la droite $(B'C')$.
1. Exprimer $\mathrm{A}ire(B',C',A)$ et $\mathrm{A}ire(B',C,C')$ en fonction de $B'H$, de AC' et $C'C$.
2. Exprimer $\mathrm{A}ire(B',C',A)$ et $\mathrm{A}ire(B',B,C')$ en fonction de $C'J$, de AB' et $B'B$.
3. Vérifier que $BI = CK$ puis montrer que $\mathrm{A}ire(B',C,C') = \mathrm{A}ire(B',B,C')$.
4. En déduire que

$$\frac{AC'}{C'C} = \frac{AB'}{B'B}.$$

5. Vérifier que $AB = AB' + B'B$ et que $AC = AC' + C'C$.
6. En déduire que

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{AB'}{AB}.$$

13. Soit (A,B,C,D) un carré de côté 1. On note E le point du segment $[A,B]$ à une distance $\frac{1}{3}$ de A, F le point du segment $[B,C]$ à une distance $\frac{1}{3}$ de C, G le point du segment $[C,D]$ à une distance $\frac{1}{3}$ de C, H le milieu de $[E,F]$ et I l'intersection de la parallèle à (CD) qui passe par F avec la parallèle à (BC) qui passe par G.
1. Montrer que (I,F,C,G) est un carré de côté $\frac{1}{3}$ et d'aire $\frac{1}{9}$.
On note $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ les compacts bordés par les lignes polygonales fermées (A,E,H,D), (E,B,F) et (D,H,F,I,G). On note $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{Q}'$ les translatés de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ de vecteur $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BG}$.
2. Montrer $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{Q}'$ recouvrent un carré $\mathcal{C}$ d'aire $\frac{8}{9}$.

14. (Cercle d'Euler) Soit (A,B,C) un triangle non dégénéré d'un plan affine euclidien. Soit C', A' et B' les milieux de (A,B), (B,C) et (C,A), G le barycentre de gravité du triangle (A,B,C), O le centre du cercle circonscrit à (A,B,C) A'', B'' et C'' les pieds des hauteurs issues de A, B et C.
1. Montrer que l'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ envoie A sur A', B sur B' et C sur C'.
2. En déduire que $O'A' = O'B' = O'C'$ avec $O' = h(O)$.
3. Montrer que $h(AA'')$ est perpendiculaire à (BC) et $(B'C')$ et que c'est la hauteur de (A',B',C') issue de A'.
4. En déduire que les hauteurs (AA''), (BB'') et (CC'') sont concourantes en un point H et $h(H) = O$.
5. Montrer que O' est le milieu de (O,H).
6. Vérifier que l'homothétie g de centre O' et de rapport -1 échange AA'' et $h(AA'')$.

7. Montrer que O' est sur la médiatrice de A' et A''.
8. En déduire que A', B', C', A'', B'' et C'' sont cocycliques.

15. Soit (A,B,C) un triangle non dégénéré d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Soit I le centre du cercle inscrit et J, K et L les images de I par les projections orthogonales sur les droites (BC), (CA) et (AB).
1. Montrer que $J \in]B,C[$, $K \in]C,A[$ et $L \in]A,B[$.
2. Montrer que $BJ = BL$, $AL = AK$ et $CK = CJ$.
3. Soit G le barycentre de A, B et C affectés des poids $BJ \cdot CK$, $CK \cdot AL$ et $AL \cdot BJ$. Montrer que le point G est le point d'intersection des droites (AJ), (BK) et (CL).

16. Soit L une matrice carrée réelle (2,2). On suppose que L est inversible, qu'elle respecte l'orientation, que $(L^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est bornée et que $< LU, LV >= 0$ pour tout couple (U,V) de vecteurs tel que $< U,V >= 0$.
1. Montrer que l'ensemble $G = \{\det(L^n); n \in \mathbf{Z}\}$ est inclus dans $]0,+\infty[$ et que c'est un sous-groupe borné du groupe multiplicatif $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \times)$.
2. En déduire que $G = \{1\}$.
3. Soit R la rotation d'angle l'angle$(\widehat{L(U_1),U_1})$ où $U_1 = (1,0)$. On pose $M = RL$.
4. Montrer qu'il existe $\lambda_1 > 0$ tel que $M(U_1) = \lambda_1 U_1$.
5. Montrer que $< MU, MV >= 0$ si $< U,V >= 0$.
6. Montrer qu'il existe $\lambda_2 > 0$ tel que $M(U_2) = \lambda_2 U_2$ avec $U_2 = (0,1)$.
7. En calculant $< M(U_1+U_2), M(U_1-U_2) >$ de deux façons montrer que $\lambda_1 = \lambda_2$.
8. Montrer que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et en déduire que L est une rotation.
9. Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse $(L^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ *est bornée*?

17. On va montrer à l'aide de la topologie et du calcul différentiel que toute matrice carrée réelle symétrique admet au moins un vecteur propre réel. Soit A une matrice carrée réelle (n,n) symétrique.
1. Montrer que l'application qui à un vecteur unitaire u associe le réel $< u, Au >$ atteint un maximum en un vecteur u_0.
Soit v un vecteur orthogonal à u_0 : $< v, u_0 >= 0$. Si $t \in \mathbf{R}$ on pose

$$f(t) =< \frac{u_0+tv}{||u_0+tv||}, A(\frac{u_0+tv}{||u_0+tv||}) > .$$

2. Montrer que si $t \in \mathbf{R}$ on a l'égalité

$$f(t) = \frac{< u_0, Au_0 > +2t < v, Au_0 > +t^2 < v, Av >}{||u_0||^2 + t^2||v||^2}.$$

3. Montrer que f est dérivable en $t = 0$ et que

$$f'(0) = 2 < v, Au_0 > .$$

4. En déduire que v est orthogonal à Au_0.

5. Conclure que u_0 est un vecteur propre de A.

18. (Ptolémée par lui-même et Mehl) Soit A, B, C et D quatre points cocycliques succesifs. On note H le point de (AC) tel que $(\widehat{\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}})$.
1. Montrer que H appartient au segment $[A,C]$ et que $AC = HA + CH$.
2. Vérifier que $(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}})$.
3. Vérifier que les triangles (A,B,H) et (D,B,C) sont semblables.
4. En déduire que

$$\frac{AB}{DB} = \frac{HA}{CD}.$$

5. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BH}}) = (\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}})$.
6. Vérifier que $(\widehat{\overrightarrow{CH},\overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$.
7. Vérifier que les triangles (B,C,H) et (B,D,A) sont semblables.
8. En déduire que

$$\frac{BC}{BD} = \frac{CH}{DA}.$$

9. Conclure que

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$

19. (Inégalité de Ptolémée) Soit A, B, C et D quatre points distincts d'un plan affine euclidien.
1. Montrer que si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs unitaires et $r,s \geq 0$ alors

$$\|r\overrightarrow{u} - s\overrightarrow{v}\| = \|r\overrightarrow{v} - s\overrightarrow{u}\|.$$

2. Vérifier que

$$\left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||^2} - \frac{\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AC}||^2} \right\| = \left\| \frac{\overrightarrow{BC}}{||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}||} \right\|.$$

3. En déduire que

$$\left\| \frac{\overrightarrow{BD}}{||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AD}||} \right\| \leq \left\| \frac{\overrightarrow{BC}}{||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}||} \right\| + \left\| \frac{\overrightarrow{CD}}{||\overrightarrow{AC}|| \cdot ||\overrightarrow{AD}||} \right\|.$$

4. Conclure que

$$||\overrightarrow{AC}|| \cdot ||\overrightarrow{BD}|| \leq ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{CD}|| + ||\overrightarrow{BC}|| \cdot ||\overrightarrow{AD}||.$$

20. On va essayer de définir la mesure d'un angle et la longueur de l'arc de cercle unitaire correspondant. On suppose savoir diviser tout angle en deux et savoir additionner deux angles et donc multiplier un angle par un entier. Aussi l'égalité angulaire $\alpha = \frac{\beta}{n}$ signifie $\beta = n\alpha$. On suppose avoir aussi défini le cosinus et le sinus d'un angle. On suppose que $\sin(\frac{\beta}{2^n})$ et $\cos(\frac{\beta}{2^n})$ tendent respectivement vers 0 et 1 quand n tend vers l'infini.

Soient A et B deux points appartenant à un demi-cercle centré à l'origine O et de rayon 1 et soit γ l'arc de cercle reliant A et B. Si $n \in \mathbf{N}$ on considère les deux lignes polygonales p_n et P_n suivantes. La ligne p_n est formée de 2^n côtés de même longueur, elle est inscrite dans l'arc γ et elle relie A à B. La ligne P_n est formée de 2^{n+1} côtés de même longueur, elle est circonscrite à l'arc γ et elle relie A à B. On note l_n et L_n les longueurs respectives de p_n et P_n.
1. Montrer que $l_n \leq l_{n+1} \leq L_{n+1} \leq L_n$.
2. Calculer l_n/L_n.
3. Montrer que la limite de ce quotient tend vers 1.
4. En déduire que les deux suites l_n et L_n sont adjacentes.

21. Soit A,B,C,D quatre points non trois à trois alignés d'un plan affine euclidien.
1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
- (AB) est parallèle à (DC) et (BC) est parallèle à (AD),
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,
- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$,
- (A,C) et (B,D) ont même milieu I,

On suppose que le quadrilatère (A,B,C,D) est un parallélogramme non dégénéré, c'est à dire qu'il vérifie ces conditions.
2. Montrer qu'une application affine qui fixe globalement (A,B,C,D) fixe I et soit elle fixe globalement chaque droite (AC) et (BD) soit elle les échange.
3. Montrer que la symétrie centrale de centre I est une isométrie qui fixe globalement (A,B,C,D).
Soit f une isométrie affine qui fixe globalement (A,B,C,D).
4. Montrer que si $f(A) \in (BD)$ alors (A,B,C,D) est un rectangle : les côtés adjacents sont perpendiculaires.
5. Montrer que si $f(A) = A$ et $f(B) = D$ alors (A,B,C,D) est un losange : les diagonales (AC) et (BD) sont orthogonales.
6. En déduire que si (A,B,C,D) n'est ni un rectangle ni un losange, les isométries qui le fixent globalement sont l'identité et la symétrie centrale de centre I.
7. On suppose que (A,B,C,D) est un rectangle mais pas un losange. Montrer que les isométries qui le fixent globalement sont l'identité, la symétrie centrale de centre I et les réflexions par rapport aux médiatrices de (A,B) et de (B,C).
8. On suppose que (A,B,C,D) est un losange mais pas un rectangle. Montrer que les isométries qui le fixent globalement sont l'identité, la symétrie centrale de centre I et les réflexions par rapport aux diagonale (A,C) et de (B,D).
9. On suppose que (A,B,C,D) est rectangle et losange, c'est à dire un carré. Montrer que les isométries qui le fixent globalement sont l'identité, la symétrie centrale

de centre I, les réflexions par rapport aux médiatrices de (A,B) et de (B,C), les réflexions par rapport aux diagonale (A,C) et de (B,D) et les rotations d'un quart de tour et de trois quarts de tour par rapport à I.

22. Soit O le centre d'un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R inclus dans un plan euclidien $\mathcal{P}$. Si $M \in \mathcal{P} \setminus \{O\}$ on note M' et on appelle inverse de M par rapport au cercle $\mathcal{C}$ le point qui vérifie

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{R^2}{OM^2}\overrightarrow{OM}.$$

Soit $N \in \mathcal{P} \setminus \{O\}$ tel que le cercle centré en N et qui passe par O coupe le cercle $\mathcal{C}$ et soit I un des points d'intersections.
1. Comparer ON et OI.
2. À quelle condition $I \in (ON)$.
On suppose que $I \notin (ON)$. Montrer que le cercle centré en I et qui passe par O coupe la droite (ON) exactement en O et en N', l'inverse de N par rapport au cercle $\mathcal{C}$.
Soit O' sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ un cercle centré en O' et qui intersecte le cercle $\mathcal{C}$ en deux points distincts P et P'.
3. Montrer que les cercles centrés en P et P' et qui passent par O' se coupent en un second point noté O''.
On suppose que le cercle centré en O'' et qui passe par O' coupe le cercle $\mathcal{C}'$ en deux points Q et Q'.
4. Vérifier que les cercles centrés en Q et Q' et qui passent par O'' se coupent en un second point noté O'''.
5. Comparer O et O'''.
6. En déduire un procédé de construction au compas seul du centre dun cercle dont on connaît tous les points.
7. Comment construire au compas seul le centre d'un cercle dont on connaît seulement trois points.

23. Soit A,B,C trois points non alignés d'un plan affine euclidien orienté. On note α, β et γ les mesures des angles géométriques $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{ACB}$. Montrer que si $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ alors $BC \leq CA \leq AC$.

24. Soit δ_1, δ_2 et Δ trois droites d'un plan affine euclidien dirigées par les vecteurs u_1, u_2 et v.
1. Montrer que les droites δ_1 et δ_2 sont parallèles si et seulement si les mesures des angles $(\widehat{v,u_1})$ et $(\widehat{v,u_2})$ coïncident modulo π.
2. On suppose que δ_1 et Δ sont perpendiculaires. Montrer qu'alors δ_1 et δ_2 sont parallèles si et seulement si δ_2 est perpendiculaire à Δ.

25. On se place dans un plan euclidien orienté $\mathcal{P}$ et on considère deux triangles non dégénérés (A,B,C) et (A',B',C').
1. On suppose (A,B,C) et (A',B',C') directement isométriques. Construire le centre de l'isométrie qui envoie A,B et C sur A',B' et C'.
2. Soit R la rotation qui envoie la demi-droite $[AB)$ sur la demi-droite $[AC)$ et soit R' la rotation qui envoie la demi-droite $[A'B')$ sur la demi-droite $[A'C')$. Construire le centre éventuel de la composée $R' \circ R$.

26. Soit (A,B,C,D) un parallélogramme non dégénéré de centre O et δ une droite qui passe par A. On note A' l'intersection de (OB) et de δ.
1. On suppose que la droite qui joint O au milieu de (A,B) coupe δ en I et que celle qui joint O au milieu de (A,D) coupe δ en J. Montrer que

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{A'I}} \cdot \frac{\overline{AJ}}{\overline{A'J}} = -1.$$

2. On note K et L les intersections des bissectrices des droites (OA) et (OA') avec δ. Montrer que

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{A'K}} \cdot \frac{\overline{AL}}{\overline{A'L}} = -1.$$

27. On pose $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.
1. Montrer que les homographies $z \mapsto h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec a,b,c et d dans $\mathbf{C}$ tels que $ad-bc \neq 0$, forment un groupe pour la composition (avec comme convention $h(\infty) = \frac{a}{c}$ et $h(-\frac{d}{c}) = \infty$ si $c \neq 0$, $h(\infty) = \infty$ si $c = 0$ et $h(\infty) = 0$ si $a = 0$).
2. Vérifier que si $A,B,C \in \overline{\mathbf{C}}$ sont distincts il existe une et une seule homographie h_{ABC} telle que $h_{ABC}(A) = \infty$, $h_{ABC}(B) = 0$ et $h_{ABC}(C) = 1$ et cette homographie est caractérisée par $h_{ABC}(D) = \frac{A-C}{A-D} \cdot \frac{B-D}{B-C}$ si A,B,C et D sont des complexes distincts.
3. Montrer que si g est une homographie qui envoie A,B et C sur A',B' et C' alors $h_{A'B'C'}(D') = h_{ABC}(D)$.

28. Si $a,\lambda \in \mathbf{C}$ avec $|a| < 1$ et $|\lambda| = 1$ alors ont pose $h_{a\lambda}(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.
1. Montrer que si $z = R\exp(i\theta)$ et $a = r\exp(i\alpha)$ alors

$$|h_{a\lambda}(z)|^2 = \left| \frac{R - r\exp(i(\alpha-\theta))}{1 - Rr\exp(i(\alpha-\theta))} \right|^2 = \frac{R^2 - 2Rr\cos(\alpha-\theta) + r^2}{1 - 2Rr\cos(\alpha-\theta) + R^2 r^2}.$$

2. Montrer que si $0 \leq u,v < 1$ alors $u+v < 1+uv$.
3. En déduire que si $|z| < 1$ alors $|h_{a\lambda}(z)| < 1$.
4. Montrer que les $h_{a,\lambda}, |a| < 1, |\lambda| = 1$, forment un groupe de bijections de $D = \{|z| < 1\}$ dans lui-même.
5. Caractériser les $h_{a,\lambda}$ qui fixent 0.

29. Critères de cocyclicité.

Soit A,B,C et D quatre points distincts d'un plan affine euclidien d'affixes a,b,c et d. Ils sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\frac{c-a}{d-a}\frac{d-b}{c-b} \in \mathbf{R}.$$

Soit A,B,C et D quatre points distincts d'un plan affine euclidien. Ils sont cocycliques ou alignés si et seulement si les angles de droites $(\widehat{(CA),(CB)})$ et $(\widehat{(DA),(DB)})$ sont égaux.

Soit A,B,C et D quatre points distincts d'un plan affine euclien. On suppose que les droites AC et BD se coupent en un cinquième point M. Alors A,B,C et D sont cocycliques si et seulement si

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}.$$

Soit A,B,C,D quatre points distincts d'un plan affine euclidien. Montrer que ce sont quatre points successifs d'un cercle ou d'une droite si et seulement si

$$||\overrightarrow{AC}||\cdot||\overrightarrow{BD}|| = ||\overrightarrow{AB}||\cdot||\overrightarrow{CD}|| + ||\overrightarrow{BC}||\cdot||\overrightarrow{AD}||.$$

30. Soit O le centre d'un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R inclus dans un plan euclidien $\mathcal{P}$. Si $M \in \mathcal{P}\setminus\{O\}$ on note M' et on appelle inverse de M par rapport au cercle $\mathcal{C}$ le point qui vérifie

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{R^2}{OM^2}\overrightarrow{OM}.$$

1. Montrer que toute droite épointée qui passe par O est invariante par l'inversion par rapport au cercle $\mathcal{C}$.
2. En considérant la paramétrisation polaire d'un cercle qui passe par O ou d'une droite qui évite O montrer que l'inversion par rapport au cercle $\mathcal{C}$ échange les cercles qui passent par O et les droites affines qui évitent O.
Soit A, B, C et D quatre points différents de $\mathcal{P}\setminus\{O\}$. On supose que (AB) et (CD) sont concourantes en O. On note A', B', C' et D' leurs inverses par l'inversion par rapport au cercle $\mathcal{C}$.
3. Montrer que $(A'B') = (AB)$ et $(C'D') = CD$.
4. Montrer que

$$\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}} = \frac{\overrightarrow{OC}'\cdot\overrightarrow{OD}'}{\overrightarrow{OA}'\cdot\overrightarrow{OB}'}.$$

5. En déduire que si A, B, C et D sont cocycliques alors A', B', C' et D' le sont également.
6. Montrer que l'image par l'inversion par rapport au cercle $\mathcal{C}$ d'un cercle qui évite O est un cercle qui évite O.

31. (Cercle des neuf points) Soit (A,B,C) un triangle non dégéré d'un plan affine euclidien, A', B' et C' les milieux de (B,C), (C,A) et (A,B), A'', B'' et C'' les pieds des hauteurs issues de A, B et C, H l'orthocentre et A''', B''' et C''' les milieux de (A,H), $(B,H$ et (C,H).
1. Montrer que A''' est le centre d'un cercle dont un diamètre est $[A,H]$ et qui contient B'' et C''.
2. En déduire que $(\widehat{(A'''B''),(A'''C'')}) = 2(\widehat{(AC),(AB)})$.
3. Montrer que B' est le centre d'un cercle dont un diamètre est $[A,C]$ et qui contient A'' et C''.
4. En déduire que $(\widehat{(B'B''),(B'C'')}) = 2(\widehat{(AC),(AB)})$.
5. Prouver que B'', C'', A''' et B' sont cocycliques.
6. Montrer que $(\widehat{(C''C'),(C''B')}) = (\widehat{(C''C'),(B'B'')}) + (\widehat{(B'B''),(B'C'')}) = (\widehat{(AC),(AB)})$.
7. Montrer que $(\widehat{(A'C'),(A'B')}) = (\widehat{(AC),(AB)})$.
8. En déduire que A', B', C' et C'' sont cocyclique.
9. En déduire que A', B', C', A'', B'', C'', A''', B''' et C''' sont cocycliques.

32. Soit (A,B,C,D) un quadrilatère inscrit dans un cercle. On note O l'intersection des diagonales (AC) et (BD).
1. Soit x,y,z et t quatre réels strictement positifs. montrer que si $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$ alors

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = \frac{x+z}{y+t}.$$

2. Montrer que les triangles (A,O,D) et (B,O,C) sont semblables.
3. En déduire que

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC} = \frac{AD}{BC}.$$

4. Vérifier que ceci implique que

$$\frac{OA}{AB \cdot AD} = \frac{OB}{BA \cdot BC} \text{ et } \frac{OD}{DC \cdot DA} = \frac{OC}{CD \cdot CB}.$$

5. En considérant les triangles (A,O,B) et (D,O,C), par des considérations de symétrie montrer que

$$\frac{OA}{AB \cdot AD} = \frac{OD}{DA \cdot DC}.$$

6. En déduire que

$$\frac{OA}{AB \cdot AD} = \frac{OB}{BA \cdot BC} = \frac{OD}{DA \cdot DC} = \frac{OC}{CD \cdot CB}.$$

7. Conclure que

$$\frac{AC}{AB \cdot AD + CD \cdot CB} = \frac{BD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$

33. Soit A, B, A' et B' quatre points distincts d'un plan affine euclidien. On suppose que (AB) et $(A'B')$ sont concourantes en un point I.

1. Soit f une similitude directe de rapport $\dfrac{||\overrightarrow{A'B'}||}{||\overrightarrow{AB}||}$ et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$. Montrer que $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ sont égaux.
2. En déduire qu'il existe une similitude directe g qui envoie A sur A' et B sur B'.
3. Montrer que g est unique.
4. Montrer qu'il existe deux cercles exactement $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ qui contiennent respectivement I, A, B et I, A', B'.
5. Montrer que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est réduit à I si et seulement si (AA') et (BB') sont parallèles.
6. En déduire que dans ce cas I est le centre d'une homothétie qui envoie A et B sur A' et B'.
On suppose qu'il existe $J \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ différent de I.
7. Montrer que J est le centre de la similitude g.

34. (Pythagore selon Vinci) On considère dans un plan affine euclidien orienté un triangle direct (A, B, C) qui est rectangle en A. Soit D, E, F, G, H et I tels que (C, B, D, E), (A, C, F, G) et (B, A, H, I) soient des carrés directs. Soit J tel que (J, E, D) et (A, B, C) soient directement isométriques. Enfin soit O l'intersection des diagonales du carré (C, B, D, E).

1. Montrer que I, A et F sont alignés et que les angles $(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IF}})$, $(\widehat{\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IH}})$, $(\widehat{\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FI}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{FI}, \overrightarrow{FC}})$ valent $\frac{\pi}{4}$.

2. Vérifier que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}})$ vaut $\frac{\pi}{2}$ et en déduire que que A, B, C et O sont cocycliques.

3. Vérifier que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO}})$ vaut $\frac{\pi}{4}$ et en déduire que les angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}})$ valent $\frac{\pi}{4}$.
4. Montrer que (J, E, D) est l'image de (A, B, C) par la symétrie de centre O.
5. Montrer que H et G sont les images de B et C par la réflexion par rapport à la droite (IF).
6. Montrer que les polygones (A, B, D, J) et (J, E, C, A) sont directement isométriques.
7. Montrer que les polygones (I, B, C, F) et (I, H, G, F) sont indirectement isométriques.
8. Montrer que les polygones (I, B, C, F) et (A, B, D, J) sont directement isométriques.
9. En comparant ces différents polygones en déduire que l'aire du carré (C, B, D, E) est égal à la somme des aires des carrés (A, C, F, G) et (B, A, H, I).

35. (Pythagore selon Vinci et Cut the Knot) On considère dans un plan affine euclidien orienté un triangle direct (A,B,C) qui est rectangle en A. Soit D, E, F, G, H et I tels que (C,B,D,E), (A,C,F,G) et (B,A,H,I) soient des carrés directs. Soit J tel que (J,E,D) et (A,B,C) soient directement isométriques.

1. Calculer les angles $(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IH}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}})$, $(\widehat{\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{FG},\overrightarrow{FC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{GH},\overrightarrow{GF}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{HI},\overrightarrow{HG}})$. En déduire que (I,B,C,F,G,H) est un polygone convexe.

2. En comparant les angles $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CB}})$ avec les angles $(\widehat{\overrightarrow{HI},\overrightarrow{HG}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{GH},\overrightarrow{GF}})$ ainsi que les longueurs IB, BC et CF avec les longueurs IH, HG et GF montrer que le polygone (I,H,G,F) est l'image du polygone (I,B,C,F) par la réflexion par rapport à la droite (IF).

3. Calculer les angles $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{DJ},\overrightarrow{DB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{JE},\overrightarrow{JD}})$, $(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EJ}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}})$. En déduire que (A,B,D,J,E,C) est un polygone convexe.

4. En comparant les angles $(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{DJ},\overrightarrow{DB}})$ avec les angles $(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EJ}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}})$ ainsi que les longueurs AB, BD et DJ avec les longueurs JE, EC et CA montrer que le polygone (J,E,C,A) est l'image du polygone (A,B,D,J) par la symétrie par rapport au milieu de (A,J).
5. Montrer également que les polygones (A,B,D,J) et (I,B,C,F) sont isométriques.
6. En comparant ces différents polygones en déduire que l'aire du carré (C,B,D,E) est égal à la somme des aires des carrés (A,C,F,G) et (B,A,H,I).

36. Soit (a,b,c) un triangle non dégénéré inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et soit t_a, t_b et t_c les droites perpendiculaires à (Oa), (Ob) et (Oc) en a, b et c.
1. Démontrer que t_a, t_b et t_c sont les tangentes en a, b et c à $\mathcal{C}$.
2. Montrer que t_b et t_c sont concourantes en un point A, t_c et t_a sont concourantes en un point B et t_a et t_b sont concourantes en un point C.
3. Montrer que (Ob) est la tangente en b au cercle centré en A et qui passe par b.
4. Montrer que $Ab = Ac$.
5. En éduire que la réflexion par rapport à la droite (OA) échange b et c.
6. Montrer que (OA) est une bissectrice de (Ob) et (Oc) ainsi que de (Ab) et (Ac).
7. Montrer que $\mathcal{C}$ est le cercle inscrit dans le triangle (A,B,C).

37. Construire à la règle et au compas dans le plan affine euclidien
- la médiatrice d'un bipoint,
- l'image d'un point donné par une réflexion par rapport à une droite donnée,
- l'image d'un point donné par une projection orthogonale sur une droite donnée,
- la perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné,
- la parallèle à une droite donnée et passant par un point donné,
- le milieu d'un bipoint,
- les bissectrices de deux droites données,
- l'image d'un point par une translation dont on connaît l'action sur un autre point,

- l'image d'un point par une homothétie dont on connaît le centre et l'action sur un point différent du centre,
- l'image d'un point par une similitude dont on connaît l'action sur deux points différents,
- l'image d'un point par une application dont on connaît l'action sur un repère affine,
- des subdivisions égales d'un segment donné,
- la tangente à un cercle en un point donné de ce cercle,
- les tangentes à un cercle qui passe par un point donné,
- les tangentes à deux cercles,
- un point d'une cônique étant donnés certains éléments caractéristiques de cette conique,
- la tangente à une ellipse en un point donné, supposés connus les deux foyers,
- la tangente à une hyperbole en un point donné, supposés connus les deux foyers,
- la tangente à une parabole en un point donné, supposer connus le foyer et la directrice.

38. On identifie $\mathbf{C}$ à un plan affine euclidien orienté.
1. Quelles sont les racines complexes (module et argument) du polynôme $P(z) = z^4+z^3+z^2+z+1$.
2. Montrer que $P(z)$ se factorise en

$$P(z) = (z^2-2\cos(\frac{2\pi}{5})z+1)(z^2-2\cos(\frac{4\pi}{5})z+1).$$

3. Trouver une équation du second degré vérifiée par $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
4. En déduire une construction à la règle et au compas du pentagone régulier.

39. Rechercher les isométries de l'espace affine euclidien qui laissent globalement invariante la réunion $\delta\cup\Delta$ des droites $\delta = \{x = y = 0\}$ et $\Delta = \{y-1 = z = 0\}$.

40. Soit $x > 1$ et A,B,C trois points alignés (dans cet ordre) dans un plan affine euclidien tels que $AB = x$ et $BC = 1$. Montrer que si I est un des points d'intersection de la perpendiculaire à (AC) qui passe par B avec le cercle de diamètre $[A,C]$ alors $BI = \sqrt{x}$.

41. On se place dans le plan affine $\mathcal{P}$ rapporté au repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ et on considère $A = (a,\alpha)$, $B = (b,\beta)$ et $C = (c,\gamma)$ trois points de $\mathcal{P}$.
1. Montrer que A, B et C sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. On suppose que A, B et C sont trois points distinctsla cubique $\mathcal{C} = \{y = x^3\}$. Montrer qu'ils sont alignés si et seulement si $a+b+c = 0$.

42. Soit $f_i(x,y) = f_{i1}x + f_{i2}y + f_{i3} = 0$, $i =\in \{1,2,3\}$, des équations cartésiennes de trois droites D_1, D_2 et D_3 d'un plan affine.
1. Montrer que $D_1 = D_2$ si et seulement si (f_1, f_2) est liée.
2. Montrer que D_1 et D_2 ont un unique point en commun si et seulement si

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

3. Montrer que D_1, D_2 et D_3 sont parallèles ou ont au moins un point commun si et seulement si

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

43. Soit $f = 0$ et $g = 0$ des équations cartésiennes de deux droites différentes D_f et D_g d'un plan affine.
1. Montrer que si D_f et D_g sont concourantes en O alors pour toute droite D passant par O il existe un unique $t \in \mathbf{R}$ tel que D a pour équation $tf + (1-t)g = 0$.
2. Montrer que si D_f et D_g sont parallèles alors pour toute droite D parallèlesà D_f et D_g il existe un unique $t \in \mathbf{R}$ tel que D a pour équation $tf + (1-t)g = 0$.

44. Soit $f = 0$ et $g = 0$ des équations cartésiennes de deux cercles différents $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ d'un plan affine euclidien. Discuter de la famille $\mathcal{C}_t = \{tf + (1-t)g = 0\}$, $t \in \mathbf{R}$.

45. Soit δ_1 et δ_2 des droites disctinctes et parallèles d'un plan affine. On considère sur δ_1 trois points distincts A, B et C' et sur δ_2 deux points distincts C et D.
1. Montrer que la droite (CD) coupe les droites (BC) et (CA) en deux points A' et B' différents de A, B et C.
2. Montrer qu'il existe des réels non nuls α et β tels que

$$\overrightarrow{DC} = \alpha\overrightarrow{C'B},\ \overrightarrow{A'C} = \alpha\overrightarrow{A'B},\ \overrightarrow{DC} = \beta\overrightarrow{C'A},\ \overrightarrow{B'C} = \beta\overrightarrow{B'A}.$$

3. En déduire que

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{1}{\alpha},\ \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \beta,\ \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

4. Conclure que

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

5. Discuter d'une réciproque.

46. Soit A_1,A_2 et A_3 trois points non alignés d'un plan affine $\mathcal{P}$ et M un point du plan tel que :

- les droites (A_1M) et (A_2A_3) se coupent en un point P_1 différent de A_2 et A_3,
- les droites (A_2M) et (A_3A_1) se coupent en un point P_2 différent de A_3 et A_1,
- les droites (A_3M) et (A_1A_2) se coupent en un point P_2 différent de A_1 et A_2.

On note a_1, a_2, a_3 les coordonnées barycentriques de M dans le repère (A_1, A_2, A_3).
1. Vérifier que les a_i sont tous non nuls.
2. En utilisant le fait que les applications affines conservent le barycentre montrer que P_1 est le barycentre de A_2 et A_3 affectés des masses a_2 et a_3.
3. En déduire que

$$\frac{\overline{P_1A_2}}{\overline{P_1A_3}} = -\frac{\overline{a_3}}{\overline{a_2}}.$$

4. En déduire que

$$\frac{\overline{P_1A_2}}{\overline{P_1A_3}} \cdot \frac{\overline{P_2A_3}}{\overline{P_2A_1}} \cdot \frac{\overline{P_3A_1}}{\overline{P_3A_2}} = -1.$$

5. Discuter d'une réciproque.

47. Soit A_1, A_2 et A_3 trois points non alignés d'un plan affine. Pour $i = 1, 2, 3$ on note P_i le barycentre de A_1, A_2 et A_3 affectés des poids $p_i = (p_{1i}, p_{2i}, p_{3i})$.
1. Montrer que P_1, P_2 et P_3 sont alignés si et seulement le déterminant de la matrice des poids $P = (p_{ij})$ est nul.
2. Montrer que $P_1 \in (A_2A_3)$ si et seulement si $p_{11} = 0$.
3. On suppose que $P_1 \in (A_2A_3)$, $P_2 \in (A_3A_1)$ et $P_3 \in (A_1A_2)$. Montrer que

$$p_{31}p_{12}p_{23} + p_{21}p_{13}p_{32} = 0$$

si et seulement si les points P_1, P_2 et P_3 sont alignés.
4. On suppose de plus que les A_i et les P_j sont différents. Montrer qu'alors

$$\frac{\overline{P_kA_i}}{\overline{P_kA_j}} = -\frac{p_{jk}}{p_{ik}} \text{ si } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

5. On suppose $P_1 \in (A_2A_3)$, $P_2 \in (A_3A_1)$ et $P_3 \in (A_1A_2)$ et que les A_i et les P_j sont différents. Montrer que

$$\frac{\overline{P_1A_2}}{\overline{P_1A_3}} \cdot \frac{\overline{P_2A_3}}{\overline{P_2A_1}} \cdot \frac{\overline{P_3A_1}}{\overline{P_3A_2}} = 1$$

si et seulement si P_1, P_2 et P_3 sont alignés (Menelaus).

48. Soit A_1, A_2 et A_3 trois points non alignés d'un plan affine $\mathcal{P}$.
1. Montrer qu'une forme affine définie sur $\mathcal{P}$ est complètement déterminée par ses valeurs en A_1, A_2 et A_3.
Soit f_1, f_2 et f_3 trois formes affines non constantes définies sur $\mathcal{P}$. Si $i = 1, 2, 3$ on note δ_i la droite affine $f_i^{-1}(0)$.

2. Montrer que les trois droites δ_1, δ_2 et δ_3 sont concourantes ou parallèles si et seulement si la famille (f_1, f_2, f_3) est liée.
Montrer que les trois droites δ_1, δ_2 et δ_3 sont concourantes ou parallèles si et seulement si le déterminant de la matrice des valeurs $V = (f_i(A_j))$ est nul.
3. Soit f une forme affine non constante définie sur $\mathcal{P}$ et soit P, Q, R trois points distincts et alignés de $\mathcal{P}$. Montrer que si f n'est pas constante sur ces trois points alors

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} = \frac{f(Q) - f(P)}{f(R) - f(P)}.$$

On suppose que $\delta_1 = (A_1P_1)$, $\delta_2 = (A_2P_2)$ et $\delta_3 = (A_3P_3)$ avec P_1, P_2 et P_3 différents de A_1, A_2 et A_3 et tels que $P_1 \in (A_2A_3)$, $P_2 \in (A_3A_1)$ et $P_3 \in (A_1A_2)$.
4. Montrer que les trois droites δ_1, δ_2 et δ_3 sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$f_3(A_1)f_1(A_2)f_2(A_3) + f_2(A_1)f_1(A_3)f_3(A_2) = 0.$$

5. En déduire que

$$\frac{\overline{P_1A_2}}{\overline{P_1A_3}} \cdot \frac{\overline{P_2A_3}}{\overline{P_2A_1}} \cdot \frac{\overline{P_3A_1}}{\overline{P_3A_2}} = -1$$

si et seulement si (A_2A_3), (A_3A_1) et (A_1A_2) sont concourantes ou parallèles (Céva).

49. (Le théorème de Menelaus est supposé connu) Soit δ et δ' deux droites concourantes d'un plan affine. On considère trois points A, B et C sur δ et trois autres points A', B' et C' sur δ'. On suppose que (AB') et (BA') sont concourantes d'intersection I, que (BC') et (CB') sont concourantes d'intersection J et (CA') et (AC') sont concourantes d'intersection K. On suppose que (AB') et (BC') sont concourantes d'intersection X, que (BC') et (CA') sont concourantes d'intersection Y et (CA') et (AB') sont concourantes d'intersection Z.
1. Traduire
- l'alignement de $A \in (ZX)$, $B \in (XY)$ et $C \in (YZ)$,
- l'alignement de $A' \in (YZ)$, $B' \in (ZX)$ et $C' \in (XY)$,
- l'alignement de $I \in (ZX)$, $B \in (XY)$ et $A' \in (YZ)$,
- l'alignement de $J \in (XY)$, $C \in (YZ)$ et $B' \in (ZX)$,
- l'alignement de $K \in (YZ)$, $A \in (ZX)$ et $C' \in (XY)$.

2. En déduire l'alignement de $I \in (ZX)$, $J \in (XY)$ et $K \in (YZ)$ (Pappus).

50. (Le théorème de Menelaus est supposé connu) Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'un plan affine euclidin. On considère six points A, B, C, A', B' et C' sur $\mathcal{C}$. On suppose que (AB') et (BA') sont concourantes d'intersection I, que (BC') et (CB') sont concourantes d'intersection J et (CA') et (AC') sont concourantes d'intersection K. On suppose que (AB') et (BC') sont concourantes d'intersection X, que (BC')

et (CA') sont concourantes d'intersection Y et (CA') et (AB') sont concourantes d'intersection Z.
1. Traduire
- la cocylicité de A, B', B et C' avec $X=(AB')\cap(BC')$,
- la cocylicité de B, C', C et A' avec $Y=(BC')\cap(CA')$,
- la cocylicité de C, A', A et B' avec $Z=(CA')\cap(AB')$,
- l'alignement de $I\in(ZX)$, $B\in(XY)$ et $A'\in(YZ)$,
- l'alignement de $J\in(XY)$, $C\in(YZ)$ et $B'\in(ZX)$,
- l'alignement de $K\in(YZ)$, $A\in(ZX)$ et $C'\in(XY)$.
2. En déduire l'alignement de $I\in(ZX)$, $J\in(XY)$ et $K\in(YZ)$ (Pascal).

51. (Le théorème de Menelaus est supposé connu) Soit $O,A,B,C,A'B',C',I,J,K$ dix points distincts d'un plan euclidien tels que O soit le point de concourance des droites (AA'), (BB') et (CC'), tels que I soit le point de concourance de (BC) et $(B'C')$, tels que J soit le point de concourance de (CA) et $(C'A')$ et tels que K soit le point de concourance de (AB) et $(A'B')$.
1. Traduire
- l'alignement de $I\in(BC)$, $C'\in(CO)$ et $B'\in(OB)$,
- l'alignement de $J\in(CA)$, $A'\in(AO)$ et $C'\in(OC)$,
- l'alignement de $K\in(AB)$, $B'\in(BO)$ et $A'\in(OA)$.
2. En déduire l'alignement de $I\in(BC)$, $J\in(CA)$ et $K\in(AB)$ (Desargues).

52. Le théorème de Morley (d'après Coxeter et Greitzer) On considère un triangle *direct* (a,b,c) du plan affine euclidien orienté. On suppose que ses angles aux sommets a,b et c valent respectivement $3\alpha,3\beta$ et 3γ. Soit X et U à l'*intérieur* du triangle et tels que d'une part les angles aux sommets b et c du triangle (b,c,X) valent β et γ et d'autre part les angles aux sommets b et c du triangle (b,c,U) valent 2β et 2γ. Soit Y et Z des points sur les droites (Uc) et (Ub) tels que les angles $\widehat{YXU}$ et $\widehat{UXZ}$ soient tous les deux égaux à $\frac{\pi}{6}$. On note enfin Y' et Z' les images de X par les réflexions S_{Uc} et S_{Ub} qui fixent (Uc) et (Ub).
1. Montrer que l'angle $\widehat{BUC}$ vaut $\pi-2\beta-2\gamma$.
2. Montrer que X est le centre du cercle inscrit au triangle (b,c,U) et en déduire que X est sur une bissectrice des droites (Ub) et (Uc).
3. En déduire que la réflexion S_{UX} par rapport à la droite (UX) échange les droites (Ub) et (Uc).
4. Montrer que Z est l'image de Y par la réflexion S_{UX} par rapport à la droite (UX).
5. Montrer que le triangle (U,Z,Y) est isocèle en U et que le triangle (X,Y,Z) est équilatéral.
6. En déduire que $YY'=XY=YZ=ZX=ZZ'$.
7. En déduire également que l'angle $\widehat{YZU}$ vaut $\beta+\gamma$ et l'angle $\widehat{XZU}$ vaut $\frac{\pi}{3}+\beta+\gamma$.

8. Montrer que l'angle $\widehat{UZZ'}$ vaut $\frac{\pi}{3}+\beta+\gamma$ et que l'angle $\widehat{YZZ'}$ vaut $\frac{\pi}{3}+2\beta+2\gamma$.
9. Montrer que les points Y,Z et Z' sont sur un cercle $\mathcal{C}$ centré en un point O tel que les angles en $\widehat{Z'OZ}$ et $\widehat{ZOY}$ valent $\frac{2\pi}{3}-2\beta-2\gamma$ c'est à dire 2α.
10. Montrer que O est sur la droite UX.
11. Montrer que $S_{Ub}\circ S_{UX}\circ S_{Uc}(Y)=Z$ et $S_{Ub}\circ S_{UX}\circ S_{Uc}(U)=U$.
12. En déduire que $S_{Ub}\circ S_{UX}\circ S_{Uc}$ est la symétrie S_{UX}.
13. Montrer que $S_{UX}(Y')=Z'$.
14. En déduire que Y' est également sur le cercle $\mathcal{C}$ et que l'angle $\widehat{Z'OY'}$ vaut 6α.
15. En utilisant le théorème de l'angle au centre (de l'angle inscrit ou de l'angle moitié suivant les terminologies classiques) montrer que a est aussi sur le cercle $\mathcal{C}$ et les angles $\widehat{Z'aZ}$, $\widehat{ZaY}$ et $\widehat{YaY'}$ valent α.
16. Conclure.

53. Le théorème de Morley (d'après Xavier Caruso) Soit α,β et γ trois réels strictement positifs et de somme $\frac{\pi}{3}$. On considère un triangle équilatéral de sommets A,B,C et de côtés 1 ainsi que trois points a,b,c tels que :

- la droite (BC) sépare a et A et les angles aux sommets a,B et C du triangle (a,B,C) sont α, $\beta+\frac{\pi}{3}$ et $\gamma+\frac{\pi}{3}$,
- la droite (CA) sépare b et B et les angles aux sommets b,C et A du triangle (b,C,A) sont β, $\gamma+\frac{\pi}{3}$ et $\alpha+\frac{\pi}{3}$,
- la droite (AB) sépare c et C et les angles aux sommets c,A et B du triangle (c,A,B) sont γ, $\alpha+\frac{\pi}{3}$ et $\beta+\frac{\pi}{3}$.

1. Montrer que
$$\begin{aligned}\frac{aC}{\sin(\gamma+\frac{\pi}{3})} &= \frac{1}{\sin(\alpha)},\\ \frac{bC}{\sin(\gamma+\frac{\pi}{3})} &= \frac{1}{\sin(\beta)}.\end{aligned}$$
2. En déduire que
$$\frac{aC}{\sin(\beta)}=\frac{bC}{\sin(\alpha)}.$$
3. Montrer que les angles aux sommet a et b du triangle (a,C,b) sont α et β.
4. En déduire à l'aide de considérations de symétrie que les angles aux sommets a,b et c du triangle (a,b,c) sont 3α, 3β et 3γ.
5. Conclure.

54. Soit A,B deux points distincts de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension n, soit $\theta\in[0,\pi[$ et soit $k>0$ et différent de 1. On note G et G' les barycentres de A et B affectés des masses 1 et k puis des masses 1 et $-k$.
1. Caractériser l'ensemble $S_k=\{M\in\mathcal{E} : AM=kBM\}$.
2. Caractériser l'ensemble $S^\theta=\{M\in\mathcal{E} : (\widehat{(AM),(BM)})=\theta\}$.

3. Déterminer les positions relatives des tangentes à S_k et à S^θ aux points d'intersection.

55. Soit (A,B,C) un triangle direct d'un plan affine euclidien orienté d'angles aux sommets α, β et γ. On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.
1. Soit A' l'intersection de la bissectrice intérieure du triangle (A,B,C) au sommet A et de la droite (B,C). Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. En déduire à l'aide de considération de symétrie que le centre Idu cercle inscrit à (A,B,C) vérifie $a\overrightarrow{AI} + b\overrightarrow{BI} + c\overrightarrow{CI} = 0$.
3. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la bissectrice extérieure du triangle (A,B,C) au sommet B. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $-a\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
4. En déduire à l'aide de considération de symétrie que le centre Jdu cercle exinscrit à (A,B,C) qui est sur la bissectrice intérieure au sommet A vérifie $-a\overrightarrow{AJ} + b\overrightarrow{BJ} + c\overrightarrow{CJ} = 0$.

56. Soit (A,B,C) un repère affine d'un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ et soit $M = aA + bB + cC$ un point de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées barycentriques dans ce repère sont (a,b,c).

On fixe un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est inclus dans un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ dont un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ complète le repère précédent.
1. Montrer que l'aire S_{ABC} algébrique du triangle (A,B,C) vérifie

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = S_{ABC}\overrightarrow{w}.$$

2. Vérifier que

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = 0.$$

3. Montrer que

$$b\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC} = 0.$$

4. À l'aide de considérations de symétrie en déduire que

$$\begin{array}{rcl} bS_{MAB} & = & cS_{MCA} \\ cS_{MBC} & = & aS_{MAB} \\ aS_{MCA} & = & bS_{MBC} \end{array}$$

5. Conclure que

$$S_{MBC}\overrightarrow{MA} + S_{MCA}\overrightarrow{MB} + S_{MAB}\overrightarrow{MC} = 0.$$

On suppose maintenant que M est le centre O du cercle circonscrit à (A,B,C). On

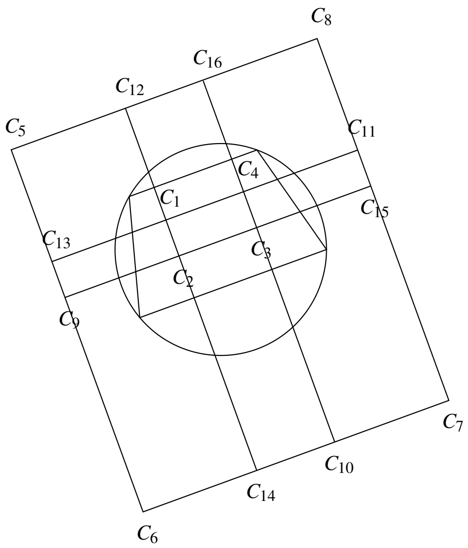
note R le rayon de ce cercle et on note α, β et γ les angles du triangle aux sommets A, B et C.
6. Calculer les angles des triangles (O,A,B), (O,B,C) et (O,C,A) en O en fonction de α, β et γ.
7. Vérifier que

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}R^2\cos(2\gamma),\ S_{OBC} = \frac{1}{2}R^2\cos(2\alpha),\ S_{OCA} = \frac{1}{2}R^2\cos(2\beta).$$

8. Conclure que

$$\cos(2\alpha)\overrightarrow{OA} + \cos(2\beta)\overrightarrow{OB} + \cos(2\gamma)\overrightarrow{OC} = 0.$$

57. Soit A_1,A_2,A_3,A_4 quatre points cocycliques successifs. On note respectivement C_1, C_2, C_3 et C_4 les centres des cercles inscrits aux triangles (A_2,A_3,A_4), (A_3,A_4,A_1), (A_4,A_1,A_2) et (A_1,A_2,A_2).
1. Montrer que C_2, C_1, A_3 et A_4 sont quatre points cocycliques successifs.
2. Montrer que l'angle au sommet C_2 du triangle (C_1,C_2,C_3) est droit.
3. En déduire que les points C_1, C_2, C_3 et C_4 forment un rectangle.
Soit C_5 le centre du cercle ex-inscrit au triangle $(A_4,A_1,A_2))$ et qui se trouve sur la bissectrice intérieure au sommet A_1. Soit C_9 le centre du cercle ex-inscrit au triangle $(A_2,A_3,A_4))$ et qui se trouve sur la bissectrice intérieure au sommet A_2. Soit C_{13} le centre du cercle ex-inscrit au triangle $(A_3,A_4,A_1))$ et qui se trouve sur la bissectrice intérieure au sommet A_1.
4. Montrer que $[C_1,C_9]$ et $[C_2,C_{13}]$ sont deux diamètres d'un cercle qui passe par A_3 et A_4
5. En déduire que C_1, C_2, C_9 et C_{13} forment un rectangle.
6. Montrer que A_4, A_1, C_5 et C_{13} sont quatre points cocycliques successifs.
7. Montrer que C_9, C_{13} et C_5 sont alignés.
8. Montrer que si on considère l'ensemble des centres des cercles inscrits et ex-inscrits aux triangles (A_2,A_3,A_4), (A_3,A_4,A_1), (A_4,A_1,A_2) et (A_1,A_2,A_2) on obtient seize points $C_i, i = 1,\dots,16$ disposés suivant la configuration très rectangulaire suivante (c'est le *drapeau danois de M. Meyer* animé sur le site Mathématikos de Jean-Paul Quelen).



cercles, trianges et cocylicité

58. Soit δ et δ' de droites d'un plan affine euclidien orienté et soit des points A, B, C et D distincts sur δ et A', B', C' et D' distincts sur δ'. On suppose que les quatre droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes en un point I hors de δ et δ'. On note H l'image de I par la projection orthogonale sur δ. Enfin note $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur unitaire de δ tel que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{HI})$ soit directe.

1. Montrer que l'aire algébrique du triangle (I,A,C) est

$$S_{IAC} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{IA}||\cdot||\overrightarrow{IC}||\sin(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}}).$$

2. Montrer que l'aire algébrique S_{IAC} vérifie aussi

$$S_{IAC} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{HI}||\cdot < \overrightarrow{AC},\overrightarrow{u} > .$$

3. Montrer que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{< \overrightarrow{AC},\overrightarrow{u} >}{< \overrightarrow{BC},\overrightarrow{u} >}.$$

4. En déduire que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{S_{IAC}}{S_{IBC}}.\frac{S_{IBD}}{S_{IBA}} = \frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}})}{\sin(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}})}.\frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{ID}})}{\sin(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID}})}.$$

5. Expliquer l'égalité

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}.\frac{\overline{B'D'}}{\overline{A'D'}}.$$

Ce nombre est appelé indifféremment birapport du quadruplet de points (A,B,C,D) ou birapport du quadruplet de droites concourantes $((IA),(IB),(IC),(ID))$.
6. Montrer que si $E\in\delta$ est tel que les birapports de (A,B,C,D) et (A,B,C,E) sont égaux alors $D=E$.
On suppose que les droites δ et δ' sont concourantes en un point J.
7. Vérifier que les parallèles à δ' et δ qui passent par I coupent les droites δ et δ'. On note O et O' ces points.
8. Montrer que

$$\frac{\overline{O'J}}{\overline{O'A'}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OJ}}.$$

On considère maintenant cinq points X, Y, Z, T et I sur un cercle $\mathcal{C}$.
9. Montrer que si I' est un sixième point du cercle alors les birapports des quatre droites $((IX),(IY),(IZ),(IT))$ et des quatre droites $((I'X),(I'Y),(I'Z),(I'T))$ sont égaux.
10. On suppose que $A=X$, $B=Y$, $C=(ZI)\cap(AB)$ et $D=(TI)\cap(AB)$. On considère un point J sur (ZI) différent de I et Z et on pose $E=(TJ)\cap(AB)$. Montrer que les birapports de (A,B,C,D) et de (A,B,C,E) sont différents.
11. En déduire que le cercle $\mathcal{C}$ privé des points X, Y, Z et T est l'ensemble des point I' du plan privé des droites (XY), (XZ), (XT), (YZ), (YT) et (ZT) tels que les birapports des quatre droites $((IX),(IY),(IZ),(IT))$ et des quatre droites $((I'X),(I'Y),(I'Z),(I'T))$ soient égaux.
12. En déduire un procédé de construction à la règle seule d'un sixième point d'un cercle, connaissant cinq de ses points.

59. Soit (A,B,C) un triangle quelconque d'un plan affine euclien, I le milieu de (b,C) et H le pied de la hauteur issue de A. Montrer les deux égalités qui suivent connues sous le nom de théorème de la médiane :

$$\begin{array}{rcl} AB^2+AC^2 & = & \frac{1}{2}BC^2+2AI^2, \\ AB^2-AC^2 & = & 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IH}. \end{array}$$

60. Soit A,B et C trois points non-alignés d'un plan affine euclien et soit Δ la tangente en A au cercle Γ qui passe par A,B et C. Montrer que les angles de droites $(\Delta,(AC))$ et $((BA),(BC))$ sont égaux.

61. Soit A,B et C trois points non-alignés d'un plan affine euclien. On note a,b et c les pieds des hauteurs issues de A,B et C et H l'orthocentre.
1. Montrer que les points A,B,a et b sont cocycliques.
2. Comparer les angles de droites $((aA),(ab))$ et $((BA),(Bb))$.
3. Montrer qu'il existe une rotation d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ qui envoie (Cc) et (CA) sur (BA) et (Bb).

4. Montrer que (Aa) est une bissectrice du couple de droite $((ab),(ac))$.
5. En déduire que H est le centre d'un cercle tangent aux droites (ab), (bc) et (ca).
6. Comparer les angles de droites $((CB),(ab))$ et $((AB),(AC))$.
7. Montrer que la tangente en C au cercle circonscrit au triangle (A,B,C) est parallèle à la droite (ab).
8. En déduire que le centre du cercle circonscrit au triangle (A,B,C) est sur la normale à la droite (ab) qui passe par C.

62. On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et on considère une droite δ de $\mathcal{P}$.
1. Montrer que $\mathcal{P}\setminus\delta$ possède exactement deux composantes connexes (appelées *demi-plans ouverts bordés par* δ).
2. Soit $\mathcal{H}$ un demi-plan bordé par la droite δ et soit $B \neq C \in \mathcal{H}$ et $A \in \delta$. On note C' l'image de C par la réflexion par rapport à la droite δ.
3. Montrer que (BC') et δ sont concourantes en un point I.
4. Montrer que $BA + AC \leq BC'$ et qu'il y a égalité si et seulement si $I = A$.

63. Soit A,B,C des points non-alignés d'un plan affine euclidien.
1. Montrer que quitte à permuter A,B et C on peut supposer que la mesure de l'angle géométrique fait par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est inférieure ou égale à $\frac{\pi}{3}$.

On oriente la plan de façon à ce que la mesure θ de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ soit directe et on considère $a \in (BC)$, $b \in (CA)$ et $c \in (AB)$. On note β et γ les images de a par les réflexions par rapport aux droites (AB) et (AC).
2. Montrer que $Aa = A\beta = A\gamma$, $ab = \beta b$ et $ca = c\gamma$.
3. Montrer les égalités suivantes relatives à des angles orientés :

$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{A\beta},\overrightarrow{AB}}) &= (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{Aa}}) \\
(\widehat{\overrightarrow{Aa},\overrightarrow{AC}}) &= (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) \\
(\widehat{\overrightarrow{A\beta},\overrightarrow{A\gamma}}) &= 2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}).
\end{aligned}$$

On note H l'image de A par la projection orthogonale sur (BC).
4. Montrer que le périmètre du triangle (a,b,c) est supérieur ou égal à

$$2 \cdot AH \cdot \sin(\theta)$$

et qu'il y a égalité si et seulement si $a = H$ et β, b, c, γ sont quatre points alignés dans cet ordre.
5. On suppose que les angles du triangle (A,B,C) sont tous aigus. Montrer que le périmètre du triangle (a,b,c) est minimal si et seulement si a,b et c sont les pieds des hauteurs du triangle (A,B,C) issues respectivement des sommets A,B et C.

64. On considère quatre points A, B, C et D d'un espace affine euclidien tels que $AB = BC = CA = DA = DB = DC$.
1. Montrer que (A,B,C,D) est un repère affine.
2. On note H l'image de D par la projection orthogonale sur le plan affine contenant A, B et C. Calculer DH.
3. Situer l'isobarycentre de A, B, C et D.
4. Calculer le volume du polyhèdre de sommets A, B, C et D.
5. Décrire les isométries qui fixent globalement $\{A,B,C,D\}$.

65. Dans l'espace affine euclidien rapporté au repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ on considère le cube $\mathcal{C}$ dont les sommets ont pour coordonnées ± 1.
1. Vérifier que les trois arêtes issues du même sommet sont deux à deux perpendiculaires.
2. Montrer que le plan médiateur aux sommets d'une arête donnée passe par les milieux des arêtes parallèles à cette arête.
3. Calculer la longueur d'une diagonale d'une face et d'une diagonale du cube.
4. Montrer que les diagonales sont concourantes mais non perpendiculaires.
5. Montrer que l'origine est préservée par toute isométrie du cube.
6. Montrer qu'une isométrie du cube est entièrement déterminée par l'image d'un sommet et des trois sommets appartenant aux arêtes issues de ce sommet.
7. Montrer qu'il existe six isométries du cube qui fixent un sommet donné.
8. Montrer qu'il existe au moins une isométrie du cube envoyant un sommet donné sur un second sommet donné.
9. En déduire qu'il existe exactement 24 isométries du cube dont 12 isométries directes.
10. Montrer que les isométries du cube sont exactement les isométries suivantes :
- l'identité,
- les 9 rotations d'un quart, d'un demi ou de trois quarts de tour par rapport à l'un des 3 axes de coordonnées,
- les 6 rotations d'un demi tour par rapport aux 6 droites passant par l'origine et par les milieux des arêtes,
- les 8 rotations d'un tiers ou de deux tiers de tour par rapport à l'une des 4 diagonales,
- la symétrie par rapport à l'origine,
- les 3 réflexions par rapport aux plans orthogonaux aux axes de coordonnées et passant par l'origine,
- les 6 réflexions par rapport aux plans passant par l'origine et orthogonaux aux aux 6 droites passant par l'origine et par les milieux des arêtes,
- les 6 applications obtenues en composant une rotation d'un quart ou de trois quart de tour par rapport à l'un des 3 axes de coordonnées par la réflexion par rapport au plan orthogonal à cet axe et passant par l'origine,

- les 8 applications obtenues en composant une rotation d'un sixième ou de cinq sixièmes de tour par rapport à l'une des 4 diagonales par la réflexion par rapport au plan orthogonal à cette diagonale et passant par l'origine,avec ymétries.
11. Montrer que les réflexions du cube engendrent le groupe des isométries du cube.

66. Soit δ_1 et δ_2 deux droites distinctes et parallèles de l'espace affine euclidien.
1. Chercher les deux isométries de l'espace qui fixent point par point $\delta_1 \cup \delta_2$.
2. Décrire les quatre isométries de l'espace qui fixent un point donné de $\delta_1 \cup \delta_2$ en préservant globalement $\delta_1 \cup \delta_2$.
3. Décrire le groupe des isométries de l'espace qui préservent globalement la réunion $\delta_1 \cup \delta_2$.

67. On considère dans le plan affine euclidien indentifié à $\mathbf{C}$ une droite δ et un cercle C. On note a l'image de 0 par la projection orthogonale sur δ, on note c le centre de C et on note r son rayon. On désigne par f l'application de $\mathbf{C}^*$ dans lui-même qui à z associe son inverse $\frac{1}{z}$.
1. Montrer que si $0 \notin C$ alors $f(C)$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
2. Montrer que si $0 \in C$ alors $f(C \setminus \{0\})$ est une droite vectorielle privée de l'origine dont on précisera un vecteur directeur.
3. Montrer que si $0 \notin \delta$ alors $f(\delta) \cup \{0\}$ est un cercle qui passe par l'origine et dont on précisera le centre.
4. Montrer que si $0 \in \delta$ alors $f(\delta)$ est une droite vectorielle privée de l'origine dont on précisera un vecteur directeur.
5. Soit a et b deux complexes différents. Déterminer les courbes de niveaux de l'argument et du module de la fonction $g(z) = \frac{z-a}{z-b}$.

68. On travaille dans $\mathbf{R}^3$ considéré comme espace affine euclidien orienté. On note O l'origine de $\mathbf{R}^3$. Soit Δ l'axe vertical : $\Delta = \{x = y = 0\}$. Soit $\mathbf{C}$ le cône de révolution $\mathbf{C} = \{x^2 + y^2 = z^2\}$ et soit $\mathcal{P}$ le plan affine $\mathcal{P} = \{z = 1 + \tan(\theta)x\}$ avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On pose $\mathcal{C} = \mathbf{C} \cap \mathcal{P}$.
1. Montrer qu'il existe un repère orthonormé de $\mathcal{P}$ dans lequel $\mathcal{C}$ s'écrit

$$\mathcal{C} = \{(1 - \tan(\theta)^2)X^2 - 2\tan(\theta)X + Y^2 = 1\}.$$

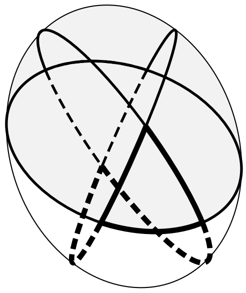
2. En déduire que $\mathcal{C}$ est une ellipse de $\mathcal{P}$.
Soit $Z = (0, 0, z)$ un point de Δ.
3. Montrer que la distance de Z à $\mathcal{P}$ est $\dfrac{z-1}{\sqrt{1+\tan(\theta)^2}}$.
4. Montrer que la distance de Z à $\mathbf{C}$ est $\dfrac{z}{\sqrt{2}}$.
5. En déduire qu'il existe deux sphères $\mathbf{S}$ et $\mathbf{S}'$ distinctes, tangentes à $\mathbf{C}$ et $\mathcal{P}$ et dont les centres I et I' appartiennent à Δ et sont séparés par $\mathcal{P}$.

6. Vérifier qu'il existe deux plans horizontaux $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ tels que $\mathcal{H} \cap \mathbf{S} = \mathbf{C} \cap \mathbf{S}$ et $\mathcal{H}' \cap \mathbf{S}' = \mathbf{C} \cap \mathbf{S}'$.
On note S et S' ces cercles : $S = \mathcal{H} \cap \mathbf{S}$, $S' = \mathcal{H}' \cap \mathbf{S}'$.
7. Soit $M \in \mathcal{C}$. Montrer que la droite (OM) coupe S en un point N et S' en un point N' tels que $M \in [N, N']$.
8. Montrer que NN' ne dépend pas de $M \in \mathcal{C}$.
9. Montrer que si A et B sont deux points d'une sphère et si δ est l'intersection des plans tangents à cette sphère en ces deux points alors pour tout $C \in \delta$ on a $AC = BC$.
On note F et F' les points de tangence de S et S' avec $\mathcal{P}$.
10. Montrer que $NM = FM$ et $N'M = F'M$.
11. En déduire que F et F' sont les deux foyers de l'ellipse $\mathcal{C}$.
Soit D l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{H}$. On note V l'intersection de $\mathcal{H}$ avec la verticale qui passe par M et P l'image de M par la projection orthogonale sur D.
12. Montrer que le triangle (M, P, V) est rectangle en V et son angle en P vaut θ.
13. Montrer que le triangle (M, N, V) est isocèle et rectangle en V.
14. En déduire que le rapport $\dfrac{MN}{MP}$ ne dépend pas de M.
15. Conclure que D est la directrice de l'ellipse $\mathcal{C}$ associée au foyer F.

69. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère affine euclidien.
1. Soit $0 \leq a < b$. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle formé par les points de $\mathcal{P}$ d'abscises a, $\frac{a+b}{2}$ et b vaut
$$\mathcal{A}_0 = \frac{(b-a)^3}{8}.$$
2. En déduire que la suite
$$\mathcal{A}_n = \frac{(b-a)^3}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right)$$
tend vers l'aire $\mathcal{A}$ du domaine bordé par la parabole et sa sécante qui passe par les points d'abscises a et b.
3. Calculer $\mathcal{A}$ (Archimède).

70. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé direct d'un plan affine euclidien et orienté $\mathcal{P}$ et soit $a, b > 0$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ pour lesquels il existe P sur l'axe horizontal et Q sur l'axe vertical tels que $M \in [P, Q]$, $PM = a$ et $QM = b$ est une ellipse.

71. On appelle grand cercle de la sphère unité $\mathbf{S}$ l'intersection de cette sphère avec un plan passant par l'origine (un plan vectoriel). On appelle hémisphère de la sphère unité l'intersection de la sphère $\mathbf{S}$ avec un demi-espace bordé par un plan passant par l'origine. Soit $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ et $\mathbf{P}_3$ trois plans vectoriels dont l'intersection est réduite à 0 et $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ et $\mathbf{H}_3$ des demi-espaces bordés par $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ et $\mathbf{P}_3$. Si $i \in \{1,2,3\}$ on pose $C_i = \mathbf{P}_i \cap \mathbf{S}$ et $H_i = \mathbf{H}_i \cap \mathbf{S}$. Si $i \neq j \in \{1,2,3\}$ pose $S_{ij} = H_i \cap H_j$, on note u_{ij} le vecteur unitaire normal à $\mathbf{P}_i$ et inclus dans $\mathbf{H}_j$ et on note $\theta_{ij} \in]0,\pi[$ l'angle (géométrique) entre les vecteur u_i et u_j : $\cos(\theta_{ij}) = < u_i, u_j >$. Enfin on pose $\mathcal{T}_{123} = H_1 \cap H_2 \cap H_3$.



1. Montrer qu'un grand cercle est bien un cercle.
2. Montrer que l'aire de la sphère $\mathbf{S}$ est 4π.
3. Montrer que l'aire de S_{ij} est $2\theta_{ij}$.
4. Observer que $\mathcal{T}_{123} = S_{12} \cap S_{23} = S_{23} \cap S_{31} = S_{31} \cap S_{12}$ et que

$$H_1 \setminus (S_{12} \cup S_{31}) \cup (C_1 \cup C_2 \cup C_3) = J(S_{23} \setminus H_1) \cup (C_1 \cup C_2 \cup C_3)$$

où $J(X) = -X$ si $X \in \mathbf{R}^3$.
5. En déduire la formule d'aire suivante :

$$2\mathrm{A}ire(\mathcal{T}_{123}) + \mathrm{A}ire(H_1) = \mathrm{A}ire(S_{12}) + \mathrm{A}ire(S_{23}) + \mathrm{A}ire(S_{31}).$$

6. Exprimer l'aire de $\mathcal{T}_{123}$ en fonction de $\pi, \theta_{12}, \theta_{23}$ et θ_{31}.

72. Soit (A,B,C) un triangle. On note α et β les angles de (A,B,C) aux sommets A et B et on note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. Soit (B,I,J,C) et (C,L,M,A) des carrés extérieurs au triangle (A,B,C). On note N et O les images par la projection orthogonale sur (AB) de I et C. On note K l'intersection des droites (AI) et (CO). On muni le plan d'un repère affine euclidien d'origine O, l'axe des abscisses est la droite (OB), l'axe des ordonnées la droite (OC) et la base $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est directe.
1. Montrer que $\overline{AO} = \cos(\alpha)b$, $\overline{AN} = \cos(\alpha)b + \cos(\beta)a + \sin(\beta)a$ et $\overline{NI} = \cos(\beta)a$ puis en déduire

$$\overline{OK} = \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)ab}{\cos(\alpha)b + \cos(\beta)a + \sin(\beta)a}.$$

2. En utilisant l'identité $\sin(\alpha)b = \sin(\beta)a$ et des considérations de symétrie en déduire que les droites (AI), (BM) et (CO) sont concourantes.

73. Soit (A,B,C) un triangle direct d'un plan affine euclidien orienté. Soit (A,N,O,B), (B,I,J,C) et (C,L,M,A) des carrés extérieurs au triangle (A,B,C).

1. Montrer que les hauteurs issues de C des triangles (A,B,C) et (N,O,C) sont confondues.
2. Montrer que le triangle (A,B,M) est l'image du triangle (A,N,J) par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre A.
3. Montrer que les droites (NJ) et (BM) sont orthogonales.
4. Montrer que la droite (BM) est l'image par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ de la hauteur issue de O du triangle (N,O,C).
5. Par des considérations de symétrie montrer que la droite (AI) est l'image par la translation de vecteur $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{OB}$ de la hauteur issue de N du triangle (N,O,C).
6. Montrer que l'intersection des droites (AI) et (BM) est l'image par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ de l'orthocentre du triangle (N,O,C).
7. Montrer que la hauteur issue de C du (N,O,C) est globalement invariante par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
8. Conclure que les droites (AI), (BM) et (CO) sont concourantes.

74. Soit γ_1 une ligne polygonale fermée et sans point double bordant un domaine C_1 du plan euclidien. Soit C_2 un convexe inclus dans C_1 et bordé par une ligne polygonale fermée et sans point double γ_2. Montrer que la longueur de γ_2 est strictement plus petite que celle de γ_1 sauf si les deux lignes sont égales.

75. Soit (A_1,A_2,A_3) un triangle non dégénéré d'un plan affine euclidien, δ_1, δ_2 et δ_3 les droites bissectrices intérieures aux sommets A_1, A_2 et A_3, p le périmètre du triangle et r le rayon du cercle inscrit. Si $\varepsilon \in]0,r[$ on note $A_{i\varepsilon}^-$ et $A_{i\varepsilon}^+$ les deux points sur δ_i tels que $A_{i\varepsilon}^- A = A_{i\varepsilon}^+ A = \varepsilon$, $A_{i\varepsilon}^-$ est dans l'enveloppe convexe de (A_1,A_2,A_3) et $A_{i\varepsilon}^+$ est hors de cette enveloppe.
1. Montrer que la somme des périmètres de $(A_{1\varepsilon}^-,A_{2\varepsilon}^-,A_{3\varepsilon}^-)$ et $(A_{1\varepsilon}^+,A_{2\varepsilon}^+,A_{3\varepsilon}^+)$ est $2p$.
2. Montrer que l'aire délimitée par les lignes polygonales fermées $(A_{1\varepsilon}^-,A_{2\varepsilon}^-,A_{3\varepsilon}^-)$ et $(A_{1\varepsilon}^+,A_{2}^+,A_{3\varepsilon}^+)$ est égale à $2p\varepsilon$.

76. On considère dans un plan affine euclidien un cercle $\mathcal{C}$ et deux points A et B. On suppose que $\mathcal{C} \cap (AB) = \emptyset$.
1. Soit Γ un cercle qui passe par A et B et qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points A' et B'. Montrer que le centre de $\mathcal{C}$ n'est pas sur la médiatrice de (A,B) alors (AB) et $(A'B')$ sont concourantes.
On suppose (AB) et $(A'B')$ concourantes en I.
2. Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{C}$ tel que

$$\overrightarrow{IT}^2 = \overrightarrow{IA'} \cdot \overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}.$$

3. En déduire que le cercle qui passe par A, B et T est tangent à $\mathcal{C}$ en T.

77. Dans le plan euclidien on considère deux droites δ et δ' et un point M hors de ces droites.

1. Montrer qu'un cercle tangent aux deux droites en des points L et L' est globalement invariant par la réflexion qui échange L et L'.
On suppose que les deux droites se coupent en O. Soit Δ la demi-bissectrice des droites δ et δ' qui est dans le secteur angulaire bordé par δ et δ' et qui contient M. Soit T un point de δ et I l'intersection de Δ avec la perpendiculaire à δ qui passe par T.
2. Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ centré en I et qui passe par T est tangent à δ et δ'.
3. Soit N un point de l'intersection de (OM) avec $\mathcal{C}$. Montrer que l'intersection J de Δ avec la parallèle à (IN) qui passe par M est le centre d'un cercle passant par M et tangent à δ et δ'.

78. Dans le plan euclidien on considère une droite δ et deux point M et M' dans le même demi-plan bordé par δ. On suppose que (MM') et δ se coupent en un point I. On suppose que $M' \in [I,M]$. Soit Γ le cercle de diamètre $[I,M]$.
1. vérifier que si K est à l'intersection de Γ et de la perpendiculaire à (IM) qui passe par M' alors $KM'^2 = \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IM'}$.
Soit L un point d'intersection de δ et du cercle centré en I et de rayon KM'.
2. Vérifier que $\overrightarrow{IL}^2 = \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IM'}$.
3. Montrer que la perpendiculaires à δ qui passe par L et la médiatrice de (M,M') se coupe en un point O centre d'un cercle $\mathcal{C}$ qui passe par M, M' et L.
4. En déduire que δ est tangente à $\mathcal{C}$ en L.

79. On se place dans le plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$ et on considère la conique $\mathcal{C}$ de foyer $F = (0,0)$, de directrice $\delta = \{y = -1\}$ et d'excentricité $e > 0$.
1. Trouver une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
On suppose dans la suite que $e \neq 1$.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ a un centre de symétrie C et deux axes de symétrie.
3. On note F' et δ' les symétriques de F et δ par rapport à C. Montrer que la conique $\mathcal{C}$ admet F' et δ' comme foyer et directrice.
4. Montrer que $M \in \mathcal{C} \mapsto FM + F'M$ (respectivement $M \in \mathcal{C} \mapsto |FM - F'M|$) si $e \in]0,1[$ (respectivement si $e > 1$).

80. Réduire les équations suivantes et donner les éléments caractéristiques de la conique associée :
1. $x^2 + 2y^2 + xy + x + y - 1 = 0$,
2. $x^2 + y^2 + 4xy + 2x - 1 = 0$,
3. $x^2 + 4y^2 + 4xy + x + y - 1 = 0$.

81. Soit $\mathcal{E}$ une ellipse, F et F' ses foyers, Γ le cercle dont un diamètre est le grand axe de l'ellipse et $\mathcal{D}$ le cercle centré en F' et de rayon le double de celui de Γ.
1. Soit $M \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$ est la bissectrice de $((MF),(MF'))$ telle F et F' soit dans le

même demi-plan bordé par $\mathcal{T}$. Montrer que si $M' \in \mathcal{T} \setminus \{M\}$ alors

$$FM' + F'M' > FM + F'M.$$

2. En déduire que $\mathcal{T}$ est la tangente en M à l'ellipse.
3. Montrer que si $M \in \mathcal{E}$ alors l'image de F par réflexion par rapport à la tangente en M à l'ellipse appartient à $\mathcal{D}$.
4. Montrer la réciproque.
5. Montrer que si $M \in \mathcal{E}$ alors l'image de F par la projection orthogonale sur la tangente en M à l'ellipse appartient à Γ.
6. Montrer la réciproque.

82. Soit $\mathcal{E}$ une ellipse, F et F' ses foyers, Γ le cercle dont un diamètre est le grand axe de l'ellipse et $\mathcal{D}$ le cercle centré en F' et de rayon le double de celui de Γ. Soit aussi δ une droite qui coupe l'ellipse en deux points M et M'.
1. Soit I l'intersection de $\mathcal{D}$ et de la demi-droite $[F', M)$ et soit J l'image de F par la reflexion par rapport à δ. Montrer que $IM = JM = FM$.
2. En déduire que M est le centre d'un cercle qui passe par F et J et qui est tangent à $\mathcal{D}$.

83. Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice δ. On note Δ l'axe de symétrie de cette parabole et S le sommet : $S = \Delta \cap \mathcal{P}$. Soit M un point de cette parabole, H son image par la projection orthogonale sur δ et $\mathcal{T}$ la bissectrice de $((MF),(MH)$ qui sépare F et H.
1. Soit $M' \in \mathcal{T} \setminus \{M\}$ et soit H' son image par la projection orthogonale sur δ. Montrer

$$\frac{FM'}{FH'} > \frac{FM}{FH} = 1.$$

2. En déduire que $\mathcal{T}$ est la tangente en M à la parbole.
3. Montrer que l'image de F par la réflexion par rapport à $\mathcal{T}$ appartient à δ.
4. Montrer que l'image de F par la projection orthogonale sur $\mathcal{T}$ appartient à la perpendiculaire au sommet S à l'axe de symétrie Δ.

84. Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole, F et F' ses foyers et M_0 un de ses point. On supose que $K = F'M_0' - FM_0 > 0$ et note $\mathcal{C}$ le cercle centré en F' et de rayon K.
1. Montrer que l'hyperbole $\mathcal{H}$ est le lieu des centres des cercles passant par F' et tangents à $\mathcal{C}$.
2. Soit $M \in \mathcal{H}$ et $\mathcal{T}$ est la bissectrice de $((MF),(MF'))$ telle que $\mathcal{T}$ sépare F et F'. Montrer que si $M' \in \mathcal{T} \setminus \{M\}$ alors

$$|FM' - F'M'| < |FM - F'M|.$$

3. En déduire que $\mathcal{T}$ est la tangente en M à l'hyperbole.

85. Soit C_a et C_b des cercles de rayons $b < a$ centrés en O, soit Δ et δ deux droites perpendiculaires en O et soit $\mathcal{E}$ l'ellipse tangente à C_a et C_b et dont le grand axe est Δ.
1. Montrer que si $M \in C_a$ et $N \in [O,M]$ sont alignés alors l'intersection de la parallèle à δ qui passe par M et de la parallèle à Δ qui passe par N est un point P de l'ellipse $\mathcal{E}$.
2. Soit Q tel que (N,P,M,Q) forme un parallélogramme. Montrer que (N,P,M,Q) est un rectangle.
3. sit I l'intersection des diagonales de (N,P,M,Q). Montrer que le cercle centré en I et qui passe par O coupent les axes de l'ellipse $\mathcal{E}$ en deux points J et K tels que $I \in (JK)$.
4. Soit M', N', P' et Q' les images de M, N, P et Q par une rotation d'un quart de tour. Montrer que Q' est sur l'ellipse.

86. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct d'un espace affine euclidien et orienté $\mathcal{E}$. On considère le cône C donné par $C = \{P(x,y,z) = 0\}$ avec $P(x,y,z) = z^2 - (x^2 + y^2)$.
1. Soit δ une droite affine : $\delta = \{(\alpha,\beta,\gamma) + t(u,v,w), t \in \mathbf{R}\}$. En étudiant $t \mapsto P(\alpha + tu, \beta + tv, \gamma + tw)$ montrer que si $O \notin \delta$ alors $\delta \cap C$ contient au plus deux points.
2. Vérifier que si une isométrie fixe globalement C elle fixe O.
3. Soient $M_0 = (1,0,1)$, $M_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ et $M_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$. Quelles sont les images possibles du triplet (M_1, M_2, M_3) par une isométrie qui fixe globalement C ?
4. Donner le groupe G des isométries qui fixent globalement C.
5. On note $\mathbf{C}_1$ le cône plein $\mathbf{C}_1 = \{x^2 + y^2 \leq z^2, z \in [0,1]\}$. Quel est le volume de ce cône plein ?
6. Quelle est la frontière $\partial\mathbf{C}_1$ de $\mathbf{C}_1$?
7. Quelle est l'aire de $\partial\mathbf{C}_1$?
8. Montrer qu'une isométrie qui fixe globalement $\mathbf{C}_1$ fixe globalement $\partial\mathbf{C}_1$.
9. Soit A, B, C trois points de $\mathcal{E}$ tels que $AB < AC$. Montrer que si $X \in]B,C[$ alors $AX < AC$.
Soient $N_0 = (1,0,1)$, $N_1 = (0,1,1)$, $N_2 = (-1,0,1)$ et $N_3 = (-1,-1,1)$.
10. Montrer que si $N \in \mathbf{C}_1 \setminus \{N_2\}$ alors $N_0N < N_0N_2$.
11. Montrer que si $N, N' \in \mathbf{C}_1$ vérifient $NN' = N_0N_1$ alors $N, N' \in \{z = 1\}$ et N' est l'image de N par la symétrie orthogonale par rapport à la droite $O + \mathbf{R}\overrightarrow{k}$.
12. Quelles sont les images possibles du quadruplet (N_0, N_1, N_2, N_3) par une isométrie qui fixe globalement $\mathbf{C}_1$?
13. Donner le groupe G des isométries qui fixent globalement $\mathbf{C}_1$.

87. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct d'un espace affine euclidien et

orienté $\mathcal{E}$. On considère l'hyperboloïde à une nappe $\mathcal{H}$ donné par $\mathcal{H} = \{P(x,y,z) = 0\}$ avec $P(x,y,z) = 1 + z^2 - (x^2 + y^2)$.
1. Quelle est l'intersection de $\mathcal{H}$ avec un plan horizontal ?
2. Soit $\lambda \geq 0$. Quelle est l'intersection de $\mathcal{H}$ avec un plan $\{y = \lambda$?
3. Donner l'équation du plan tangent à $\mathcal{H}$ en $(0,1,0)$.
4. Montrer que $\mathcal{H}$ contient la droite $\delta = \{(t,1,t) : t \in \mathbf{R}\}$.
5. Montrer qu'il y exactement deux droites contenues dans $\mathcal{H}$ et qui passent par $(0,1,0)$.
6. Montrer que $\mathcal{H}$ ne contient pas de droite horizontale.
7. Montrer que $\mathcal{H}$ est globalement invariant sous l'action des rotations d'axe $O + \mathbf{R}\overrightarrow{k}$, des réflexions par rapport aux plans qui contiennent cet axe et de la réflexion par rapport au plan $\{z = 0\}$.
8. Décrire toutes les droites contenues dans $\mathcal{H}$.
9. Décrire toutes les isométries qui laissent $\mathcal{H}$ globalement invariant.

88. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct d'un espace affine euclidien et orienté $\mathcal{E}$. On considère un polynôme P de degré 2 et l'hélice Γ paramétrée dans ce repère par

$$\Gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t).$$

1. En écrivant P sous la forme $P(x,y,z) = az^2 + b(x,y)z + c(x,y)$ avec $a \in \mathbf{R}$, b une forme affine et c un polynôme de degré 2, montrer que si $\Gamma \subset \{P = 0\}$ alors $a = 0$ et $b = 0$.
2. En déduire que $\Gamma \subset \{P = 0\}$ si et seulement s'il existe $\lambda \neq 0$ tel que

$$P(x,y,z) = \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

3. Quelle est la tangente, la courbure et la torsion de Γ en un point $\Gamma(t)$?
4. Quelle la longueur de l'arc de courbe $\Gamma([0,2\pi])$?
5. Calculer $\Gamma(0)\Gamma(t)^2$.
6. Trouver les triplets (u,v,w) tels que

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(0)\Gamma(1) & = & \Gamma(u)\Gamma(v) \\ \Gamma(1)\Gamma(2) & = & \Gamma(v)\Gamma(w) \\ \Gamma(2)\Gamma(0) & = & \Gamma(w)\Gamma(u) \end{array}$$

7. Donner le groupe G des isométries qui fixent globalement Γ.

89. Soit $(\mathcal{E}, <,>)$ un espace affine euclidien et f une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui conserve la distance euclidienne : si $x, y \in \mathcal{E}$ alors $||\overrightarrow{xy}|| = ||\overrightarrow{f(x)f(y)}||$.
1. Soit $o \in \mathcal{E}$. On note τ la translation de vecteur $\overrightarrow{f(o)o}$. On pose $g = \tau \circ f$. Montrer que g conserve la distance euclidienne et fixe o.
On vectorialise $\mathcal{E}$ en prenant comme origine o : $(\mathcal{E}, <,>)$ est vu comme un espace vectoriel euclidien $(E, <,>)$.

2. Vérifier que si $u,v \in E$ alors $||u|| = ||g(u)||$ et $||u-v|| = ||g(u)-g(v)||$.
3. Montrer que si $u,v \in E$ alors

$$||u||^2 + ||v||^2 - 2 < u,v >= ||g(u)||^2 + ||(v)||^2 - 2 < g(u),g(v) > .$$

4. En déduire que g conserve le produit scalaire : si $u,v \in E$ alors $< u,v >=< g(u),g(v) >$.
Soit $b = (e_1,....,e_n)$ une base orthonormale de E.
5. Soit $u \in E$. Montrer que $u = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$ avec pour chaque i, $\lambda_i =< u,e_i >$.
6. Vérifier que si on pose pour chaque i $e'_i = g(e_i)$ alors $b' = (e'_1,...,e'_n)$ est une base orthonormale.
7. Montrer que si $u = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n \in E$ alors $g(u) = \lambda_1 e'_1 + ... + \lambda_n e'_n$.
8. En déduire que g est une isométrie linéaire.
9. Pourquoi f est une isométrie affine ?

90. Soit $(\mathcal{E},<,>)$ un espace affine euclidien et f une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui conserve la distance euclidienne (une isométrie) : si $x,y \in \mathcal{E}$ alors $||\overrightarrow{xy}|| = ||\overrightarrow{f(x)f(y)}||$.
1. Soit $y \neq y'$. Montrer que le lieu des points équidistants de y et y' est

$$\{x \in \mathcal{E} : xy = xy'\} = \{x \in \mathcal{E} :< \overrightarrow{yy'},\overrightarrow{yx} >= \frac{1}{2} < \overrightarrow{yy'},\overrightarrow{yy'} >\}$$

et en déduire que ce lieu est un hyperplan $H_{yy'}$ qui passe par le milieu de (y,y') (il est appelé hyperplan médiateur de (y,y')).
2. Vérifier que l'application $r_{yy'}$ qui à x associe $r_{yy'}(x)$ tel que

$$\overrightarrow{xr_{yy'}(x)} = \frac{< \overrightarrow{yy'},\overrightarrow{yx} >}{< \overrightarrow{yy'},\overrightarrow{yy'} >}\overrightarrow{yy'}$$

est une isométrie affine et involutive dont les points fixes sont $H_{yy'}$ et qui échange y et y' (elle est appelée réflexion par rapport à l'hyperplan $H_{yy'}$).
3. Vérifier que la composée d'isométries est une isométrie.
4. Montrer que si $f(x) = x$ et si $f(y) \neq y$ alors x est dans l'hyperplan médiateur de $(y,f(y))$.
Fixons un $n+1$-uplet $(x_1,...,x_{n+1})$.
5. Soit $k = 0,...,n$. On suppose que f fixe les k premiers points du $n+1$-uplet mais pas x_{k+1}. On note r_{k+1} la réflexion par rapport à l'hyperplan médiateur de $(x_{k+1},f(x_{k+1})$. Montrer que $r_{k+1} \circ f$ fixe les $k+1$ premiers points du $n+1$-uplet.
6. En déduire qu'il existe des isométries $r_1,...,r_{n+1}$ qui sont des réflexions hyperplanes ou l'identité telles que $g = r_{n+1} \circ ... \circ r_1 \circ f$ fixe tous les x_i.
7. Montrer que s'il existe y tel que $g(y) \neq y$ alors la famille $(x_1,...,x_{n+1})$ n'est pas un repère affine.

8. Montrer que f est la composée d'au plus $n+1$ réflexions hyperplanes.

91. Constuction de l'exponentielle réelle à partir de la méthode d'Euler pour intégrer l'équation $f' = f$. L'exercice aborde une question fondamentale des équations différentielles et de l'analyse. L'observation géométrique suivante aide à la résolution de la majorité des questions. Le produit

$$\prod_{i=1}^{n}(1+t_i)$$

représente l'image $f(t)$ de $t = t_0 + t_1 + ... + t_n$ (avec $t_0 = 0$ et les $t_i \geq 0$) par la fonction continue et affine par morceaux f définie sur $[0,t]$ par $f(0) = 1$ et pour $i = 0,...,n-1$ f est affine sur $[t_0+...+t_i, t_0+...+t_{i+1}]$ et sa dérivée vaut $f(t_0+...+t_i)$. On considère deux entiers naturels n et p tels que $2p \leq n+2$.
1. Montrer que

$$(1+\frac{1}{n})^p \leq 1+\frac{2p}{n}.$$

2. En déduire que

$$(1+\frac{1}{n})^n \leq 4.$$

3. Soit x et y des réels strictement positifs et différents. On pose $z = x+y$. Montrer que

$$(1+z) < (1+x)(1+y) < (1+\frac{z}{2})^2.$$

Soient $t, t_1, ...t_n$ des réels positifs ou nuls tels que $t_1 + ...t_n = t$.
4. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n}(1+t_i) \leq (1+\frac{t}{n})^n$$

et que l'égalité est stricte dès que l'un des t_i est différent de $\frac{t}{n}$.
5. Montrer que la suite $(1+\frac{1}{n})^n$ est une suite strictement croissante de rationnels strictement positifs qui converge vers un réel noté e qui est inférieur ou égal à 4.
Soit x un réel positif. Pour tout entier naturel k on note $p_k(x)$ la partie entière de $2^k x$ et on pose

$$e_k(x) = (1+\frac{1}{2^k})^{p_k(x)}(1+(x-\frac{p_k(x)}{2^k})).$$

6. Montrer que

$$1 \leq (1+(x-\frac{p_k(x)}{2^k})) \leq (1+\frac{1}{2^k}) \leq 2.$$

7. Soit X la partie entière de x augmentée de 1 : $X = 1 + p_0(x)$. Montrer que $p_k(x) < p_k(X) = 2^k X$ et en déduire que

$$e_k(x) \leq (1+\frac{1}{2^k})^{2^k X} = ((1+\frac{1}{2^k})^{2^k})^X \leq e^X.$$

8. Montrer que $2p_k(x) \leq p_{k+1}(x) \leq 2p_k(x)+1$.
9. Montrer que si $2p_k(x) = p_{k+1}(x)$ alors $x - \frac{p_k(x)}{2^k} = x - \frac{p_{k+1}(x)}{2^{k+1}}$ et

$$e_{k+1}(x) = (1+\frac{1}{2^{k+1}})^{2p_k(x)}(1+(x-\frac{p_k(x)}{2^k})).$$

10. Montrer que si $2p_k(x)+1 = p_{k+1}(x)$ alors $x - \frac{p_k(x)}{2^k} = x - \frac{p_{k+1}(x)}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}$ et

$$e_{k+1}(x) = (1+\frac{1}{2^{k+1}})^{2p_k(x)}(1+\frac{1}{2^{k+1}})(1+(x-\frac{p_{k+1}(x)}{2^{k+1}})).$$

11. En déduire que dans les deux cas $e_k(x) \leq e_{k+1}(x)$.
12. Conclure que la suite $e_k(x)$ ainsi définie converge vers un réel supérieur ou égal à 1 noté $\exp(x)$ et appelé *exponentielle de x*.
13. Montrer que si x et y sont deux réels positifs et k un entier naturel alors

$$p_k(x)+p_k(y) \leq p_k(x+y) \leq p_k(x)+p_k(y)+1.$$

14. En déduire que

$$1 \leq \frac{e_k(x+y)}{e_k(x)e_k(y)} \leq (1+\frac{1}{2^k}).$$

15. Montrer l'identité fonctionnelle

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Sources documentaires

Livres

H.S.M. COXETER ET S.L. GREITZER Redécouvrons la géométrie
C. DESCHAMPS, J. ODOUX, E. RAMIS Cours de mathématiques spéciales
J. HADAMARD Géométrie élémentaire
D. PEDOE Geometry, a comprehensive course
C. TISSERON Géométrie affine, projective et euclidienne
G. WANNER Cours de géométrie

Sites internet

Cut the Knot
Descartes et les Mathématiques de Patrice Debart
Mathématiques magiques de Thérèse Eveilleau
Chronomath de Serge Mehl
Mathématikos de Jean-Paul Quelen
Page web de Xavier Caruso
Wikipedia