Géométrie au Capes 2007-2008
Solution de l'exercice 58

exercice 58 1. L'aire algébrique S_{IAC} du triangle (I, A, C) est égale à la moitié du déterminant de la matrice des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IC}$ dans une quelconque base orthonormée directe. Soit $b = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base orthonormée directe telle que $\overrightarrow{IA} = \|\overrightarrow{IA}\| \overrightarrow{i}$. On a

$$\overrightarrow{IC} = \|\overrightarrow{IC}\| \left(\cos(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}}) \overrightarrow{i} + \sin(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}}) \overrightarrow{j} \right).$$

La matrice des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IC}$ dans la base b est donc

$$\begin{pmatrix} \|\overrightarrow{IA}\| & \|\overrightarrow{IC}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}}) \\ 0 & \|\overrightarrow{IC}\| \sin(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}}) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est $\|\overrightarrow{IA}\| \cdot \|\overrightarrow{IC}\| \sin(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}})$. Par conséquent

$$S_{IAC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{IA}\| \cdot \|\overrightarrow{IC}\| \sin(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}}).$$

2. Considérons maintenant la base orthonormée directe $b' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de premier vecteur $\overrightarrow{u}$. On a

$$\overrightarrow{AC} = < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{u} > \overrightarrow{u}$$

et il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\overrightarrow{AI} = \lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{HI} = \lambda \overrightarrow{u} + \|\overrightarrow{HI}\| \overrightarrow{v}.$$

Ainsi, vu les propriétés de bilinéarité et d'antisymétrie du déterminant on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
det_b(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) &= det_{b'}(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) \\
&= det_{b'}(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}) \\
&= det_{b'}(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AC}) \\
&= det_{b'}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}) \\
&= det_{b'}(\overrightarrow{AC}, \lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{HI}) \\
&= det_{b'}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{HI}) \\
&= \|\overrightarrow{HI}\| \cdot < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{u} > .
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$S_{IAC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{HI}\| \cdot < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{u} > .$$

3. L'application qui à $X, Y \in \delta$ associe $< \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{u} >$ est une mesure algébrique définie sur δ. Or deux mesures algébriques définies sur une droite sont proportionnelles. Par conséquent on a bien

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{< \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{u} >}{< \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{u} >}.$$

4. Les résultats des questions 1 et 2 valent aussi pour les triangles (I, A, D), (I, B, C) et (I, B, D). Le résultat de la question 3 vaut aussi pour le triplet (A, B, D). Aussi on a

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} &= \frac{<\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{u}>}{<\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{u}>} \cdot \frac{<\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{u}>}{<\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{u}>} \text{ (question 3)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{HI}\| \cdot < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{u} >}{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{HI}\| \cdot < \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{u} >} \cdot \frac{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{HI}\| \cdot < \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{u} >}{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{HI}\| \cdot < \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{u} >} \\
&= \frac{S_{IAC}}{S_{IBC}} \cdot \frac{S_{IBD}}{S_{IAD}} \text{ (question 2)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{IA}\| \cdot \|\overrightarrow{IC}\| \sin(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}})}{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{IB}\| \cdot \|\overrightarrow{IC}\| \sin(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}})} \cdot \frac{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{IB}\| \cdot \|\overrightarrow{ID}\| \sin(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID}})}{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{IA}\| \cdot \|\overrightarrow{ID}\| \sin(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}})} \text{ (question 1)} \\
&= \frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}})}{\sin(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}})} \cdot \frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID}})}{\sin(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}})}.
\end{aligned}$$

Ceci prouve

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{S_{IAC}}{S_{IBC}} \cdot \frac{S_{IBD}}{S_{IAD}} = \frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}})}{\sin(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}})} \cdot \frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID}})}{\sin(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}})}.$$

5. D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} &= \frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}})}{\sin(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}})} \cdot \frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{ID}})}{\sin(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID}})} \\
&= \frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{IA'},\overrightarrow{IC'}})}{\sin(\widehat{\overrightarrow{IB'},\overrightarrow{IC'}})} \cdot \frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{IB'},\overrightarrow{ID'}})}{\sin(\widehat{\overrightarrow{IA'},\overrightarrow{ID'}})} \\
&= \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{B'D'}}{\overline{A'D'}}.
\end{aligned}$$

6. On a

$$(A,B,C,D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{1}{\overline{AD}}.$$

Or $\dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BA}}{\overline{BC}} \neq 0$ car A, B et C sont distincts. Par conséquent l'application qui à $D \in \delta \setminus \{A\}$ associe le birapport (A,B,C,D) est la composée de trois applications injectives :

- l'application qui à $D \in \delta \setminus \{A\}$ associe la mesure algébrique
- l'inversion qui à $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ associe $\dfrac{1}{x}$,
- l'application affine bijective qui à $y \in \mathbf{R}$ associe

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BA}}{\overline{BC}} y.$$

C'est donc une injection. C'est pourquoi si $D, E \in \delta \setminus \{A\}$ alors $D = E$ si et seulement si $(A,B,C,D) = (A,B,C,E)$.

7. Notons δ_I la parallèle à δ qui passe par I et δ'_I la parallèle à δ' qui passe par I. Puisqu'on est dans un plan et que δ et δ' sont des droites concourantes alors que δ et δ_I sont parallèles, on en déduit que δ_I et δ' sont concourantes en un point O'. De même puisque δ' et δ'_I sont parallèles on en déduit que δ'_I et δ sont concourantes en un point O.

8. Les droites (JA) et $(O'I)$ sont parallèles et les droites (AI) et (JO') sont concourantes en A'. D'après Thalès,

$$\frac{\overline{JA'}}{\overline{O'A'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{IA'}}.$$

Or $\overline{O'J} = \overline{O'A'} - \overline{JA'}$ et $\overline{IA} = \overline{IA'} - \overline{AA'}$. Par conséquent

$$\frac{\overline{O'J}}{\overline{O'A'}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}}.$$

Les droites (OI) et (JA') sont parallèles et les droites $(A'I)$ et (JO) sont concourantes en A. D'après Thalès,

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{JA}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{A'A}}.$$

Or $\overline{OJ} = \overline{OA} - \overline{JA}$ et $\overline{IA'} = \overline{IA} - \overline{AA'}$. Par conséquent

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{JA}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}}.$$

Finalement en regroupant les deux résultats on obtient

$$\frac{\overline{O'J'}}{\overline{O'A'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{JA}}.$$

9. Quand quatre points distincts P, Q, R et S sont cocycliques alors

$$(\widehat{(RP), (RQ)}) = (\widehat{\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SQ}})$$

et donc

$$\sin(\widehat{\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}}) = \sin(\widehat{\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SQ}}).$$

Ainsi on a

$$\begin{array}{rcl}
\sin(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}}) & = & \sin(\widehat{\overrightarrow{I'A}, \overrightarrow{I'C}}) \\
\sin(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}}) & = & \sin(\widehat{\overrightarrow{I'B}, \overrightarrow{I'C}}) \\
\sin(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID}}) & = & \sin(\widehat{\overrightarrow{I'B}, \overrightarrow{I'D}}) \\
\sin(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}}) & = & \sin(\widehat{\overrightarrow{I'A}, \overrightarrow{I'D}})
\end{array}$$

et donc

$$\frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}})}{\sin(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}})} \cdot \frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID}})}{\sin(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}})} = \frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{I'A}, \overrightarrow{I'C}})}{\sin(\widehat{\overrightarrow{I'B}, \overrightarrow{I'C}})} \cdot \frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{I'B}, \overrightarrow{I'D}})}{\sin(\widehat{\overrightarrow{I'A}, \overrightarrow{I'D}})}.$$

D'aprés la question 4 ceci signifie que les birapports $((IX), (IY), (IZ), (IT))$ et $((I'X), (I'Y), (I'Z), (I'T))$ sont égaux.

10. Les droites (ZI) et (TI) sont concourantes en I et non parallèles car Z, T et I sont trois points distincts d'un cercle. Les droites (TI) et (TJ) sont non parallèles. En effet dans le cas contraire elles seraient confondues et $J \in (TI) \cap (ZI)$ donc J serait égal à I. Par conséquent $E = (TJ) \cap (AB)$ est distinct de $D = (TI) \cap (AB)$. D'après la question 6 ceci implique que les birapports (A, B, C, D) et (A, B, C, E) sont distincts.

11. Notons $\mathbf{B}$ le birapport commun $((I'X), (I'Y), (I'Z), (I'T))$ à tous les points $I' \in \mathcal{C} \setminus \{X, Y, Z, T\}$. Prenons maintenant un point quelconque P hors du cercle $\mathcal{C}$ et des droites (XY), (XZ), (XT), (YZ), (YT) et (ZT). La droite (ZP) intersecte le cercle en un point I' différent des sommets X, Y Z et T. En appliquant le résultat de la question 10 avec $J = P$ et $E = (TJ) \cap (AB)$ on obtient que les birapports (A, B, C, D) et (A, B, C, E) sont différents. Or le premier est égal au birapport $((IX), (IY), (IZ), (IT))$ donc à $\mathbf{B}$ et le second est égal au birapport $((PX), (PY), (PZ), (PT))$. Ceci prouve que $((PX), (PY), (PZ), (PT))$ est différent de $\mathbf{B}$ dès que P est hors du cercle $\mathcal{C}$ et des droites (XY), (XZ), (XT), (YZ), (YT) et (ZT). Ainsi le birapport $((I'X), (I'Y), (I'Z), (I'T))$ caractérise les points I' du cercle $\mathcal{C}$.

12. Voici les étapes permettant de construire à la règle seule un sixième point d'un cercle dont on connaît déjà cinq points.

étape 1 On trace les droites (XI), (YI), (ZI) et (TI).

étape 2 On trace la droite (XY) et on pose $A = X$, $B = Y$, $C = (ZI) \cap (AB)$ et $D = (TI) \cap (AB)$. On a $((IX), (IY), (IZ), (IT)) = (A, B, C, D)$.

étape 3 On trace une droite Δ coucourante en $A = X$ à (AB) et concourante à (XI), (YI), (ZI) et (TI). On pose $E = (YI) \cap \Delta$, $F = (ZI) \cap \Delta$ et $G = (TI) \cap \Delta$. On a $(A, B, C, D) = (A, E, F, G)$.

étape 4 On choisit sur $(YI) \setminus \{I, Y, E\}$ un point J. On trace les droites (FJ) et (GJ). On pose $M = (FJ) \cap (AB)$ et $N = (GJ) \cap (AB)$. On a $(A, E, F, G) = (A, B, M, N)$.

étape 5 On trace les droites (ZM) et (TN) et on pose $K = (ZM) \cap (TN)$. On a

$$(A, B, M, N) = ((KA), (KB), (KM), (KN)) = ((KX), (KY), (KZ), (KT).$$

conclusion Par construction on a

$$((IX), (IY), (IZ), (IT)) = ((KX), (KY), (KZ), (KT).$$

D'après la question 11 ceci implique que K est un sixième point du cercle $\mathcal{C}$.