Géométrie au Capes 2007-2008
Solution de l'exercice 57

exercice 57

Dans cet exercice $\widehat{\Pi}$ désigne l'angle orienté de vecteurs plat.

On munit le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ d'une orientation.

Nous utiliserons deux critères de cocyclicités. Soit M, N et P trois points non alignés d'un plan affine euclidien et soit $\mathcal{C}$ le cercle qu'ils définissent. Les poinst M et N séparent le cercle en deux arcs : celui qui contient P est noté $\mathcal{C}_1$ et l'autre $\mathcal{C}_2$. Soit Q un point du plan et différent de M et N. Il appartient à $\mathcal{C}_1$ si et seulement si

$$(\widehat{\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QN}}) = (\widehat{\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}}).$$

Il appartient à $\mathcal{C}_2$ si et seulement si

$$(\widehat{\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QN}}) = (\widehat{\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}}) + \widehat{\Pi}.$$

Enfin il appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si

$$(\widehat{(QM), (QN)}) = (\widehat{(PM), (PN)}).$$

Nous utiliserons les propriétés suivante. Soit (A, B, C) un triangle non dégénéré. Si O est le centre du cercle inscrit alors les couples $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$, et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ définissent la même orientation. On en déduit que

$$mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}) = \frac{1}{2} mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}).$$

De plus si O' est le centre du cercle ex-inscrit qui se trouve sur la bissectrice intérieure en A alors $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO'})$ définissent la même orientation. Si on oriente le plan suivant cette orientation alors

$$mes(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO'}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}}) + \frac{\pi}{2}.$$

On oriente le plan affine euclidien de telle sorte que $mes(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}}) > 0$.

1. Puisque A_1, A_2, A_3 et A_4 sont quatre points cocycliques successifs on a

$$(\widehat{\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}}) = (\widehat{\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_2A_4}}).$$

Or d'une part

$$(\widehat{\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}}) + (\widehat{\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_3A_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4A_3}}) = \widehat{\Pi}$$

et

$$(\widehat{\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_2A_4}}) + (\widehat{\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_3A_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{A_4A_2}, \overrightarrow{A_4A_3}}) = \widehat{\Pi}.$$

D'autre part

$$(\widehat{\overrightarrow{C_1A_3}, \overrightarrow{C_1A_4}}) + (\widehat{\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_3C_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{A_4C_1}, \overrightarrow{A_4A_3}}) = \widehat{\Pi}$$

et

$$(\widehat{\overrightarrow{C_2A_3}, \overrightarrow{C_2A_4}}) + (\widehat{\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_3C_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{A_4C_2}, \overrightarrow{A_4A_3}}) = \widehat{\Pi}.$$

De plus, puisque C_1 et C_2 sont les centres des cercles inscrits à (A_2, A_3, A_4) et (A_3, A_4, A_1) on a

$$mes(\widehat{\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_3C_1}}) = \frac{1}{2}mes(\widehat{\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_3A_2}}),$$
$$mes(\widehat{\overrightarrow{A_4C_1}, \overrightarrow{A_4A_3}}) = \frac{1}{2}mes(\widehat{\overrightarrow{A_4A_2}, \overrightarrow{A_4A_3}})$$

et

$$mes(\widehat{\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_3C_2}}) = \frac{1}{2}mes(\widehat{\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_3A_1}}),$$
$$mes(\widehat{\overrightarrow{A_4C_2}, \overrightarrow{A_4A_3}}) = \frac{1}{2}mes(\widehat{\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4A_3}}).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
mes(\widehat{\overrightarrow{C_1A_3}, \overrightarrow{C_1A_4}}) &= \pi - \tfrac{1}{2}mes(\widehat{\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_3A_2}}) - \frac{1}{2}mes(\widehat{\overrightarrow{A_4A_2}, \overrightarrow{A_4A_3}}) \\
&= \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}mes(\widehat{\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_2A_4}}) \\
&= \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}mes(\widehat{\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}}) \\
&= \pi - \tfrac{1}{2}mes(\widehat{\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_3A_1}}) - \frac{1}{2}mes(\widehat{\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4A_3}}) \\
&= mes(\widehat{\overrightarrow{C_2A_3}, \overrightarrow{C_2A_4}}).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$(\widehat{\overrightarrow{C_1A_3}, \overrightarrow{C_1A_4}}) = (\widehat{\overrightarrow{C_2A_3}, \overrightarrow{C_2A_4}}).$$

Cette égalité implique que A_3, A_4 C_1 et C_2 sont quatre points cocycliques et que C_1 et C_2 sont sur le même arc de cercle d'extrémités A_3 et A_4.

2. Les points A_3, A_4 C_1 et C_2 sont cocyliques. On a donc

$$(\widehat{(C_2C_1),(C_2A_4)}) = (\widehat{(A_3C_1),(A_3A_4)}).$$

Par permutation circulaire on déduit de la question 1 que les points A_4, A_1 C_2 et C_3. On a donc

$$(\widehat{(C_2A_4),(C_2C_3)}) = (\widehat{(A_1A_4),(A_1C_3)}).$$

Par conséquent

$$\begin{array}{rcl} (\widehat{(C_2C_1),(C_2C_3)}) & = & (\widehat{(C_2C_1),(C_2A_4)}) + (\widehat{(C_2A_4),(C_2C_3)}) \\ & = & (\widehat{(A_3C_1),(A_3A_4)}) + (\widehat{(A_1A_4),(A_1C_3)}). \end{array}$$

Puisque C_1 et C_3 sont les centres des cercles inscrits dans (A_2, A_3, A_4) et dans (A_4, A_1, A_2) on a

$$2(\widehat{\overrightarrow{A_3C_1},\overrightarrow{A_3A_4}}) = (\widehat{\overrightarrow{A_3A_2},\overrightarrow{A_3A_4}})$$

et

$$2(\widehat{\overrightarrow{A_1A_4},\overrightarrow{A_1C_3}}) = (\widehat{\overrightarrow{A_1A_4},\overrightarrow{A_1A_2}}).$$

Or puisque A_1, A_2, A_3 et A_4 sont quatre points coycliques successifs on a

$$(\widehat{\overrightarrow{A_1A_4},\overrightarrow{A_1A_2}}) = -(\widehat{\overrightarrow{A_3A_2},\overrightarrow{A_3A_4}}) + \widehat{\Pi}.$$

Finalement on a

$$(\widehat{(C_2C_1),(C_2C_3)}) = (\widehat{(A_3C_1),(A_3A_4)}) + (\widehat{(A_1A_4),(A_1C_3)})$$

et

$$\begin{array}{rcl} 2(\widehat{\overrightarrow{C_2C_1},\overrightarrow{C_2C_3}}) & = & 2(\widehat{\overrightarrow{A_3C_1},\overrightarrow{A_3A_4}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{A_1A_4},\overrightarrow{A_1C_3}}) \\ & = & (\widehat{\overrightarrow{A_3A_2},\overrightarrow{A_3A_4}}) - (\widehat{\overrightarrow{A_3A_2},\overrightarrow{A_3A_4}}) + \widehat{\Pi} \\ & = & \widehat{\Pi}. \end{array}$$

En divisant par 2 on en déduit que les droites (C_2C_1) et (C_2C_3) sont orthogonales.

3. Par permutation circulaire on déduit de la question 2 que les droites (C_2C_3) et (C_3C_4) sont orthogonales ainsi que les droites (C_4C_1) et (C_1C_2). Par conséquent (C_1, C_2, C_3, C_4) est un rectangle.

4. Le point C_9 est le point d'intersection de la bissectrice intérieure au sommet A_2 du triangle (A_2, A_3, A_4) et des bissectrices extérieures aux deux autres sommets de ce triangle. Par conséquent les droites (A_3C_1) et (A_3C_9) sont orthogonales ainsi que les droites (A_4C_1) et (A_4C_9). Par conséquent $[C_1, C_9]$ est bien le diamètre d'un cercle $\mathcal{C}'$ qui contient C_1, C_9, A_3 et A_4. Le point C_{13} est le point d'intersection de la bissectrice intérieure au sommet A_1 du triangle (A_3, A_4, A_1) et des bissectrices extérieures aux deux autres sommets de ce triangle. Par conséquent les droites (A_3C_2) et (A_3C_{13}) sont orthogonales ainsi que les droites (A_4C_2) et (A_4C_{13}). Par conséquent $[C_2, C_{13}]$ est bien le diamètre d'un cercle $\mathcal{C}''$ qui contient C_2, C_{13}, A_3 et A_4. En raison de la cocyclicité de A_3, A_4 C_1 et C_2 on en déduit que $\mathcal{C}' = \mathcal{C}''$ et que $[C_1, C_9]$ et $[C_2, C_{13}]$ sont des diamètres d'un cercle qui contient A_3 et A_4.

5. Puisque $[C_1, C_9]$ et $[C_2, C_{13}]$ sont deux diamètres d'un cercle le quadrilatère (C_1, C_2, C_9, C_{13}) est un rectangle.

6. Les triangles (A_1, A_3, A_4) et (A_1, A_2, A_4) sont directs. Par conséquent $(\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4C_2})$ et $(\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4C_3})$ sont directes. Il vient donc

$$mes(\widehat{\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4C_{13}}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4C_2}}) + \frac{\pi}{2}$$

et

$$mes(\widehat{\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4C_5}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4C_3}}) + \frac{\pi}{2}.$$

Ceci signifie que

$$mes(\widehat{\overrightarrow{C_{13}A_4}, \overrightarrow{C_2A_4}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{C_5A_4}, \overrightarrow{C_3A_4}}) = -\frac{\pi}{2}.$$

Il vient donc, puisque $C_2 \in]A_1, C_{13}[$ et $C_3 \in]A_1, C_5[$,

$$\begin{aligned} mes(\widehat{\overrightarrow{C_{13}A_4}, \overrightarrow{C_{13}A_1}}) &= mes(\widehat{\overrightarrow{C_{13}A_4}, \overrightarrow{C_2A_4}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{C_2A_4}, \overrightarrow{C_2A_1}}) \\ &= -\tfrac{\pi}{2} + mes(\widehat{\overrightarrow{C_2A_4}, \overrightarrow{C_2A_1}}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} mes(\widehat{\overrightarrow{C_5A_4}, \overrightarrow{C_5A_1}}) &= mes(\widehat{\overrightarrow{C_5A_4}, \overrightarrow{C_3A_4}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{C_3A_4}, \overrightarrow{C_3A_1}}) \\ &= -\tfrac{\pi}{2} + mes(\widehat{\overrightarrow{C_3A_4}, \overrightarrow{C_3A_1}}). \end{aligned}$$

Or on peut montrer en permutant les indices, comme on a montré que $(\widehat{\overrightarrow{C_1A_3}, \overrightarrow{C_1A_4}}) = (\widehat{\overrightarrow{C_2A_3}, \overrightarrow{C_2A_4}})$, que

$$(\widehat{\overrightarrow{C_2A_4}, \overrightarrow{C_2A_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{C_3A_4}, \overrightarrow{C_3A_1}}).$$

On en déduit que

$$mes(\widehat{\overrightarrow{C_{13}A_4},\overrightarrow{C_{13}A_1}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{C_5A_4},\overrightarrow{C_5A_1}})$$

c'est à dire que

$$(\widehat{\overrightarrow{C_{13}A_4},\overrightarrow{C_{13}A_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{C_5A_4},\overrightarrow{C_5A_1}}).$$

Par conséquent A_4, A_1, C_5 et C_{13} sont cocycliques et C_5 et C_{13} sont sur le même arc de cercle d'extrémités A_4 et A_1.

7. On a

$$(\widehat{\overrightarrow{C_5C_{13}},\overrightarrow{C_9C_{13}}}) = (\widehat{\overrightarrow{C_5C_{13}},\overrightarrow{C_5A_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{C_5A_1},\overrightarrow{A_4A_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{A_4A_1},\overrightarrow{A_4C_{13}}}) + (\widehat{\overrightarrow{A_4C_{13}},\overrightarrow{C_9C_{13}}}).$$

Or

$$(\widehat{\overrightarrow{C_5C_{13}},\overrightarrow{C_5A_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{A_4C_{13}},\overrightarrow{A_4A_1}}) + \widehat{\Pi}$$

car A_4, A_1, C_5 et C_{13} sont cocycliques et C_5 et C_{13} sont sur le même arc de cercle d'extrémités A_4 et A_1. Donc

$$(\widehat{\overrightarrow{C_5C_{13}},\overrightarrow{C_9C_{13}}}) = \widehat{\Pi} + (\widehat{\overrightarrow{C_5A_1},\overrightarrow{A_4A_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{A_4C_{13}},\overrightarrow{C_9C_{13}}}).$$

On a aussi

$$mes(\widehat{\overrightarrow{C_5A_1},\overrightarrow{A_4A_1}}) = \frac{1}{2}mes(\widehat{\overrightarrow{A_2A_1},\overrightarrow{A_4A_1}})$$

car C_5 est sur la bissectrice intérieure au triangle (A_4, A_1, A_2) en A_1.

On sait que les points A_3, A_4 C_1 et C_2 sont quatre points cocycliques et que C_1 et C_2 sont sur le même arc de cercle d'extrémités A_3 et A_4. Les segments $[C_1, C_9]$ et $[C_2, C_{13}]$ coupent le segment $[A_3, A_4]$ parce que C_1 et C_2 sont les centres des cercles inscrits aux triangles (A_2, A_3, A_4) et (A_3, A_4, A_1) alors que C_9 et C_{13} sont les centres des cercles ex-inscrits aux mêmes triangles et qui sont placés sur les bissectrices intérieures à ces triangles issues des sommets A_2 et A_1. Ceci implique que A_3, A_4 C_9 et C_{13} sont quatre points cocycliques et que C_9 et C_{13} sont sur le même arc de cercle d'extrémités A_3 et A_4. Par conséquent

$$(\widehat{\overrightarrow{A_4C_{13}},\overrightarrow{C_9C_{13}}}) = (\widehat{\overrightarrow{A_4A_3},\overrightarrow{C_9A_3}}).$$

Or

$$mes(\widehat{\overrightarrow{A_4A_3},\overrightarrow{C_9A_3}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{A_4A_3},\overrightarrow{C_1A_3}}) - \frac{\pi}{2}.$$

Mais
$$mes(\widehat{\overrightarrow{A_4A_3}, \overrightarrow{C_1A_3}}) = \frac{1}{2} mes(\widehat{\overrightarrow{A_4A_3}, \overrightarrow{A_2A_3}}).$$
De plus, puisque A_1, A_2, A_3 et A_4 sont quatre points cocycliques successifs on a
$$mes(\widehat{\overrightarrow{A_2A_1}, \overrightarrow{A_4A_1}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_4A_3}}) + \pi.$$
Ceci donne
$$\begin{aligned} mes(\widehat{\overrightarrow{A_4A_3}, \overrightarrow{C_1A_3}}) &= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2} mes(\widehat{\overrightarrow{A_2A_1}, \overrightarrow{A_4A_1}}) - \frac{1}{2}\pi \\ &= -\tfrac{1}{2} mes(\widehat{\overrightarrow{A_2A_1}, \overrightarrow{A_4A_1}}). \end{aligned}$$
Ainsi
$$mes(\widehat{\overrightarrow{C_5A_1}, \overrightarrow{A_4A_1}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{A_4A_3}, \overrightarrow{C_1A_3}}) = 0.$$
Par conséquent
$$mes(\widehat{\overrightarrow{C_5C_{13}}, \overrightarrow{C_9C_{13}}}) = \pi.$$
Ceci signifie que l'angle orienté de droites $(\widehat{(C_5C_{13}), (C_9C_{13})})$ est nul et que C_5, C_9 et C_{13} sont alignés.

8. Par permutation circulaire et par symétrie on en déduit que C_6, C_9, C_{13}, C_5 sont alignés, C_5, C_{12}, C_{16}, C_8 sont alignés, C_8, C_{11}, C_{15}, C_7 sont alignés et enfin C_7, C_{10}, C_{14}, C_6 sont alignés. Il est alors facile d'obtenir la figure anoncée en utilisant les réponses aux quesions 3 et 5 et en raisonnant par permutation circulaire.