Géométrie au Capes 2007-2008
Solutions des exercices 41 et 42

exercice 41 1. On a les égalités suivantes entre déterminants :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ \beta-\alpha & \gamma-\alpha \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & b-a & c-a \\ 0 & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

C'est pourquoi les affirmations suivantes sont équivalentes :

- A, B et C sont alignés
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ liée
- $\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ \beta-\alpha & \gamma-\alpha \end{vmatrix} = 0$
- $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

2. On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+c^2 \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(c^2-b^2+ac-ab) \\
&= (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).
\end{aligned}$$

Par conséquent si $A = (a, a^3)$, $B = (b, b^3)$ et $C = (c, c^3)$ sont trois points distincts de la cubique $\mathcal{C} = \{x^3 = y\}$ alors $(b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$ et d'après le calcul précédent et la question 1, ils sont alignés si et seulement si $a + b + c = 0$.

exercice 42 Dans cet exercice on pose $\overrightarrow{v_1} = (f_{12}, -f_{11})$, $\overrightarrow{v_2} = (f_{22}, -f_{21})$ et $\overrightarrow{v_3} = (f_{32}, -f_{31})$. Ces vecteurs dirigent les droites D_1, D_2 et D_3. En particulier ils sont non nuls.

1. Puisque les lieux des zéros des f_i sont des droites, aucune des fonctions f_i n'est nulle. Supposons que (f_1, f_2) soit liée. Alors il existe $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ tel que $f_2 = \lambda f_1$. Par conséquent

$$D_1 = \{f_1 = 0\} = \{f_2 = 0\} = D_2.$$

Réciproquement, supposons les deux droites D_1 et D_2 égales. Alors elles ont même direction : $\mathbf{R}\overrightarrow{v_1} = \mathbf{R}\overrightarrow{v}_2$. Il existe donc $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ tel que $\overrightarrow{v_2} = \lambda \overrightarrow{v_1}$. Soit maintenant un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) qui appartient à $D_1 = D_2$: $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0$. Par conséquent

$$f_{13} = -(f_{11}x_0 + f_{12}y_0)$$

et

$$\begin{array}{rcl} f_{23} & = & -(f_{21}x_0 + f_{22}y_0) \\ & = & -(\lambda f_{11}x_0 + \lambda f_{12}y_0) \\ & = & -\lambda(f_{11}x_0 + f_{12}y_0) \\ & = & -\lambda f_{13}. \end{array}$$

Ainsi $f_2 = \lambda f_1$ et (f_1, f_2) liée.

2. Les droites D_1 et D_2 ont un unique point en commun si et seulement si le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_{11}x + f_{12}y & = & -f_{13} \\ f_{21}x + f_{22}y & = & -f_{23} \end{array} \right.$$

d'inconnue (x, y) admet une unique solution, c'est à dire d'après Cramer si et seulement si

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

3. Supposons que D_1, D_2 et D_3 soient parallèles. Alors leurs directions sont confondues et il existe des réels non nuls λ_2 et λ_3 tels que $\overrightarrow{v_2} = \lambda_2 \overrightarrow{v_1}$ et

$\overrightarrow{v_3} = \lambda_3 \overrightarrow{v_1}$. Par conséquent on a

$$c_1 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{pmatrix} = f_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, \; c_2 = \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \end{pmatrix} = f_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

et donc

$$f_{12}c_1 - f_{11}c_2 = 0.$$

Puisque $\overrightarrow{v_1} = (f_{12}, -f_{11})$ est non nul la relation $f_{12}c_1 + f_{11}c_2 = 0$ implique que (c_1, c_2) est liée. Par conséquent le déterminant d'une matrice $(3, 3)$ dont les deux premières colonnes sont c_1 et c_2 est nul. Ainsi

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons que D_1, D_2 et D_3 aient un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) en commun. Si deux des trois droites sont confondues, D_1 et D_2 par exemple, alors (f_1, f_2) est liée d'après la question 1. Ceci implique que (f_1, f_2, f_3) est liée et donc

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons donc que les trois droites soient deux à deux distinctes. En particulier $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une base de $\mathbf{R}^2$ et il existe des réels λ_1 et λ_2 tels que $\overrightarrow{v_3} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2}$. Ainsi

$$\begin{array}{rcl} f_{31} & = & \lambda_1 f_{11} + \lambda_2 f_{21} \\ f_{32} & = & \lambda_1 f_{12} + \lambda_2 f_{22}. \end{array}$$

De plus, puisque M_0 appartient à l'intersection des trois droites on a

$$\begin{array}{rcl} f_{13} & = & -(f_{11}x_0 + f_{12}y_0) \\ f_{23} & = & -(f_{21}x_0 + f_{22}y_0) \\ f_{33} & = & -(f_{31}x_0 + f_{32}y_0). \end{array}$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} f_{33} & = & -(f_{31}x_0 + f_{32}y_0) \\ & = & -(\lambda_1 f_{11} + \lambda_2 f_{21})x_0 - (\lambda_1 f_{12} + \lambda_2 f_{22})y_0 \\ & = & -\lambda_1(f_{11}x_0 + f_{12}y_0) - \lambda_2(f_{21}x_0 + f_{22}y_0) \\ & = & \lambda_1 f_{13} + \lambda_2 f_{23}. \end{array}$$

Par conséquent $f_3 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Ceci implique que (f_1, f_2, f_3) est liée et donc

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Montrons maintenant la réciproque. On suppose

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Ceci implique que (f_1, f_2, f_3) est liée. On veut montrer que D_1, D_2 et D_3 sont parallèles ou ont un point en commun. Il suffit donc de montrer que si deux des droites sont concourantes en un point M_0 alors M_0 appartient à la troisième. On suppose donc que D_1 et D_2 sont différentes et concourantes en M_0. Puisque D_1 et D_2 sont concourantes (f_1, f_2) est libre. Par conséquent, puisque (f_1, f_2, f_3) est liée il existe λ_1 et λ_2 tels que $f_3 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Ainsi

$$f_3(M_0) = \lambda_1 f_1(M_0) + \lambda_2 f_2(M_0)$$

et donc $M_0 \in D_3$.