Géométrie au Capes 2007-2008
Solutions des exercices 30 et 31

exercice 30 On note $f_{\mathcal{C}}$ l'inversion par rapport au cercle $\mathcal{C}$. Ce type d'inversion est la composée d'une inversion comme celle considérée dans le corrigé de l'exercice 29 (avec $A = O$) et d'une homothétie de centre O. Or une homothétie de centre O préserve globalement la famille des droites qui passent par O, la famille des droites qui évitent O, la famille des cercles qui passent par O et la famille des cercles qui évitent O. C'est pourquoi :

1. la réponse est essentiellemnt contenue dans le corrigé de l'exercice 29,

2. la réponse est essentiellemnt contenue dans le corrigé de l'exercice 29.

3. Puisque $O \in (AB)$, d'après la question 1 les points A' et B' appartiennent à (AB). Ils sont distincts puisque ce sont les images de deux points distincts par $f_{\mathcal{C}}$ qui est une involution de $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ dans lui-même (c'est donc une bijection). Puisque par deux points distincts passe une et une seule droite on en déduit que A' et B' définissent une droite qui est nécessairement (AB) : $(A'B') = AB)$. De même, $(C'D') = CD$.

4. Les conditions d'alignement de O, A et B d'une part et de O, C et D d'eutre part impliquent l'existence de $\lambda, \mu \neq 0$ tels que

$$\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OD} = \mu\overrightarrow{OC}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}} &= \frac{\lambda\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}}{\mu\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}} \\
&= \frac{\frac{\mu\overrightarrow{OC}}{(\mu\overrightarrow{OC})^2}\cdot\frac{\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OC}^2}}{\frac{\lambda\overrightarrow{OA}}{(\lambda\overrightarrow{OA})^2}\cdot\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OA}^2}} \\
&= \frac{\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{OD'}}{\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}}
\end{aligned}$$

5. Puisque $\{O\} = (AB) \cap (CD) = (A'B') \cap (C'D')$, d'après le troisième critère de cocyclicité de l'exercice 29, A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$$

c'est à dire si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}} = 1.$$

De même, $A',' B'$, C' et D' sont cocycliques si et seulement si

$$\overrightarrow{OA}' \cdot \overrightarrow{OB}' = \overrightarrow{OC}' \cdot \overrightarrow{OD}'$$

c'est à dire si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{OA}' \cdot \overrightarrow{OB}'}{\overrightarrow{OC}' \cdot \overrightarrow{OD}'} = 1.$$

Or d'après la question 4,

$$\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}} = 1$$

est équivalent à

$$\frac{\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OC'} \cdot \overrightarrow{OD'}} = 1$$

Par conséquent A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $A',' B'$, C' et D' le sont.

6. Soit $\mathcal{C}_1$ un cercle qui évite O. Soit δ la droite qui passe par O et le centre de $\mathcal{C}_1$. Soit O' un des deux points de $\mathcal{C}_1 \cap \delta$. On considère la composée $f_{\mathcal{C}} \circ f_{\mathcal{C}'}$ où $\mathcal{C}'$ est un cercle centré en O'. On identifie $\mathcal{P}$ à $\mathbf{C}$ de telle sorte que l'affixe du centre O de $\mathcal{C}$ soit l'origine et celle de O' soit un réel a'. La droite δ est donc identifiée à l'axe réel. Les cercles $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}'$ sont invariants par la conjugaison complexe. L'inversion $f_{\mathcal{C}}$ par rapport au cercle $\mathcal{C}$ devient l'application $z \mapsto \dfrac{R^2}{\overline{z}}$ où R désigne le rayon de $\mathcal{C}$ et l'inversion $f_{\mathcal{C}'}$ par rapport au cercle $\mathcal{C}'$ devient l'application $z \mapsto a' + \dfrac{R'^2}{\overline{z - a'}}$ où R' désigne le rayon de $\mathcal{C}'$. Un calcul montre qu'il existe un cercle $\mathcal{C}''$ centré en $O'' \in \delta$ d'affixe $a'' \in \mathbf{R}$ et un réel b tel que si $z \in \mathbf{C} \setminus \{a''\}$ alors

$$(f_{\mathcal{C}} \circ f_{\mathcal{C}'})(z) = b - f_{\mathcal{C}''}(\overline{z}).$$

Or $f_{\mathcal{C}'}$ est une inversion donc une involution. De plus la conjugaison commute avec $f_{\mathcal{C}'}$. Il vient donc en composant à droite par $f_{\mathcal{C}'}$

$$f_{\mathcal{C}}(z) = b - (f_{\mathcal{C}''} \circ f_{\mathcal{C}'})(\overline{z}).$$

Or $\mathcal{C}_1$ est invariant par la conjugaison, $f_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C}_1 \setminus \{O'\})$ est une droite δ_1 et $f_{\mathcal{C}''}(\delta_1)$ est un cercle qui passe par le point O'' mais privé de ce point. Puisque l'image d'un cercle par une translation ou par une symétrie centrale est un cercle il vient $f_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_1 \setminus \{O'\})$ est un cercle qui passe par le point d'affixe $b - a''$ mais privé de ce point. En vérifiant que ce point est $f_{\mathcal{C}}(O')$ on conclut que $f_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_1)$ est un cercle.

exercice 31 1. Les droites $(AB'') = (AC)$ et $(HB'') = (BB'')$ sont orthogonales. Par conséquent A, H et B'' sont sur le cercle de diamètre $[A, H]$ et dont le centre est le milieu A''' de (A, H). Le point C'' appartient également à ce cercle puisque Les droites $(AC'') = (AB)$ et $(HC'') = (CC'')$ sont aussi orthogonales.

2. Puisque B'', C'' et A sont sur un cercle centré en A''', d'après le théorème de l'angle au centre on a

$$(\widehat{\overrightarrow{A'''B''}, \overrightarrow{A'''C''}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AB''}, \overrightarrow{AC''}}).$$

Puisque $(AB'') = (AC)$ et $(AC'') = (AB)$, il vient en passant aux angles orientés de droites

$$(\widehat{(A'''B''), (A'''C'')}) = 2(\widehat{(AC), (AB)}).$$

3. Les droites $(AC'') = (AB)$ et (CC'') sont orthogonales. Par conséquent A, C et C'' sont sur le cercle de diamètre $[A, C]$ et dont le centre est le milieu B' de (A, C). Le point A'' appartient également à ce cercle puisque Les droites $(CA'') = (CB)$ et $(HC'') = (AA'')$ sont aussi orthogonales.

4. Puisque C, C'' et A sont sur un cercle centré en B', d'après le théorème de l'angle au centre on a

$$(\widehat{\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{B'C''}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC''}}).$$

Puisque $(B'C) = (B'B'')$ et $(AC'') = (AB)$, il vient en passant aux angles orientés de droites

$$(\widehat{(B'B''), (B'C'')}) = 2(\widehat{(AC), (AB)}).$$

5. D'après les questions 2 et 3 on a

$$(\widehat{(A'''B''), (A'''C'')}) = 2(\widehat{(AC), (AB)}) = (\widehat{(B'B''), (B'C'')})$$

donc

$$(\widehat{(A'''B''), (A'''C'')}) = (\widehat{(B'B''), (B'C'')}).$$

Cette égalité implique la cocyclicité des points A''', B'', C'' et B'.

6. L'égalité

$$((C''C'),\widehat{(C''B'})) = ((C''C'),\widehat{(B'B''})) + ((B'B''),\widehat{(B'C''}))$$

résulte de la relation de Chasles pour les angles orientés de droites et de l'égalité $(C''B') = (B'C'')$. Or on a $(C''C') = (AB)$ et $(B'B'') = (AC)$. Donc $(\widehat{(C''C'),(B'B'')}) = (\widehat{(AC),(AB)}) = -(\widehat{(AB),(AC)})$. De plus d'après la question 4, $(\widehat{(B'B''),(B'C'')}) = 2(\widehat{(AC),(AB)})$. Par conséquent

$$\begin{array}{rcl} (\widehat{(C''C'),(C''B')}) & = & (\widehat{(C''C'),(B'B'')}) + (\widehat{(B'B''),(B'C'')}) \\ & = & -(\widehat{(AB),(AC)}) + 2(\widehat{(AB),(AC)}) \\ & = & (\widehat{(AB),(AC)}). \end{array}$$

7. On note G le barycentre de (A,B,C) : $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = 0$. Par définition de A', B' et C' on a $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$. Le triangle (A',B',C') est l'image du triangle (A,B,C) par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$. Cette homothétie est une similitude directe. Elle conserve les angles orientés de droites. Ainsi

$$(\widehat{(A'B'),(A'C')}) = (\widehat{(AB),(AC)}).$$

8. D'après les questions 6 et 7 on a

$$(\widehat{(C''C'),(C''B')}) = (\widehat{(AC),(AB)}) = (\widehat{(A'B'),(A'C')})$$

donc

$$(\widehat{(C''C'),(C''B')}) = (\widehat{(A'B'),(A'C')}).$$

Cette égalité implique la cocyclicité des points A', B', C' et C''.

9. Notons $\mathcal{C}$ le cercle qui passe par A, B et C. D'après la question $C'' \in \mathcal{C}$. On montre de la même façon que A'' et B'' appartiennent à $\mathcal{C}$. On en déduit alors en utilisant la question 5 que $A''' \in \mathcal{C}$. On obtient de la même façon que B''' et C''' appartiennent à $\mathcal{C}$.