# Géométrie au Capes 2007-2008
# Solutions des exercices 19 et 29

**exercice 19** 1. Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ des vecteurs unitaires (d'un plan vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$) et soit $r, s \geq 0$. Si $A$ est un point d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ dirigé par $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ alors les triangles $(A, A + r\overrightarrow{u}, A + s\overrightarrow{v})$ et $(A, A + r\overrightarrow{v}, A + s\overrightarrow{u})$ sont isométriques car ils ont le même angle géométrique au sommet $A$ et pour les deux triangles les côtés issus de $A$ ont des longueurs égales à $r$ et $s$. Par conséquent les côtés de ces triangles sont deux à deux égaux. Ceci implique l'égalité

$$||r\overrightarrow{u} - s\overrightarrow{v}|| = ||r\overrightarrow{v} - s\overrightarrow{u}||.$$

2. On pose

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{||\overrightarrow{AB}||}\overrightarrow{AB},\ \ \overrightarrow{v} = \frac{1}{||\overrightarrow{AC}||}\overrightarrow{AC}$$

et

$$r = ||\overrightarrow{AB}||,\ \ s = ||\overrightarrow{BC}||.$$

En appliquant 1. on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||^2} - \frac{\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AC}||^2}\right\| &= \left\|\frac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||\cdot||\overrightarrow{AC}||} - \frac{\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AC}||\cdot||\overrightarrow{AC}||}\right\| \\
&= \left\|\frac{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AB}||\cdot||\overrightarrow{AC}||}\right\| \\
&= \left\|\frac{\overrightarrow{BC}}{||\overrightarrow{AB}||\cdot||\overrightarrow{AC}||}\right\|.
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\overrightarrow{BD}}{||\overrightarrow{AB}||\cdot||\overrightarrow{AD}||}\right\| &= \left\|\frac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||^2} - \frac{\overrightarrow{AD}}{||\overrightarrow{AD}||^2}\right\| \text{ (par la question 2)}\\
&= \left\|\frac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||^2} - \frac{\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AC}||^2} + \frac{\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AC}||^2} - \frac{\overrightarrow{AD}}{||\overrightarrow{AD}||^2}\right\| \text{ (par Chasles)}\\
&\leq \left\|\frac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||^2} - \frac{\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AC}||^2}\right\| + \left\|\frac{\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AC}||^2} - \frac{\overrightarrow{AD}}{||\overrightarrow{AD}||^2}\right\| \text{ (inegalite triangulaire)}\\
&= \left\|\frac{\overrightarrow{BC}}{||\overrightarrow{AB}||\cdot||\overrightarrow{AC}||}\right\| + \left\|\frac{\overrightarrow{CD}}{||\overrightarrow{AC}||\cdot||\overrightarrow{AD}||}\right\| \text{ (par la question 2).}
\end{aligned}$$

4. En multipliant les deux termes de l'inégalité obtenue dans la question 3 par le produit $||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}|| \cdot ||\overrightarrow{AD}||$ on obtient

$$||\overrightarrow{AC}|| \cdot ||\overrightarrow{BD}|| \leq ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{CD}|| + ||\overrightarrow{BC}|| \cdot ||\overrightarrow{AD}||.$$

**exercice 29** Avant de prouver les critères annoncés de cocyclicité montrons un critère de cocyclicité très classique. Considérons un cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et $A$ et $B$ deux points diamétralement opposés de $\mathcal{C}$. Soit $M$ un point du plan différent de $A$ et de $B$. Le point $M$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $(AM)$ et $(BM)$ sont orthogonales c'est à dire si et seulement si

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

En effet, puisque $A$ et $B$ sont diamétralement opposés on a

$$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})\\
&= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) \ .\\
&= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2.
\end{aligned}$$

Le premier critère de cocyclité fait appel à la représentation complexe des points d'un plan affine euclidien orienté. C'est une traduction complexe du deuxième critère. Pour s'en convaincre il suffit de savoir qu'une mesure de l'angle orienté de droites $(\widehat{(CA),(CB)})$ est égale à l'argument (modulo $\pi$) du nombre complexe $\dfrac{c-a}{c-b}$. Ainsi les angles orientés de droites $(\widehat{(CA),(CB)})$ et $(\widehat{(DA),(DB)})$ sont égaux si et seulement si la différence des arguments des complexes $\dfrac{c-a}{c-b}$ et $\dfrac{d-a}{d-b}$ est nulle (modulo $\pi$) c'est à dire si et seulement si $\dfrac{c-a}{d-a}\dfrac{d-b}{c-b} \in \mathbf{R}$.

Avant de prouver le deuxième critère faisons l'observation suivante. Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{U}$ trois vecteurs unitaires. Il existe exactement deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ tels que

$$(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{U},\overrightarrow{V'}}).$$

Les vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ sont opposés l'un de l'autre et définissent donc la même droite vectorielle. C'est pourquoi la moitié d'un angle orienté de vecteurs n'est pas bien définie sauf si on cherche à la définir comme angle orienté de droites. Si $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\alpha'}$ et $\overrightarrow{\beta'}$ sont quatre vecteurs non nuls l'égalité

$$2(\widehat{\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{\alpha'},\overrightarrow{\beta'}})$$

implique seulement l'égalité suivante entre angles orientés de droites

$$(\widehat{\mathbf{R}\overrightarrow{\alpha},\mathbf{R}\overrightarrow{\beta}}) = (\widehat{\mathbf{R}\overrightarrow{\alpha'},\mathbf{R}\overrightarrow{\beta'}}).$$

Prouvons le deuxième critère. Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points distincts d'un plan affine euclidien. Il est clair que ces quatre points sont alignés si et seulement si les angles de droites $(\widehat{(CA),(CB)})$ et $(\widehat{(DA),(DB)})$ sont nuls. Supposons que $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés et considérons le cercle $\mathcal{C}$ qui contient $A$, $B$ et $C$. Soit $O$ le centre de $\mathcal{C}$. Les triangles $(O,A,C)$ et $(O,C,B)$ sont isocèles en $O$. Par conséquent on a les égalités suivantes entre angles orientés de vecteurs :

$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CO}}) &= (\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}})\\ (\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB}}) &= (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}}).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AC}}) &= (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CO}}) + (\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{AO}}) + (\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}})\\ &= 2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CO}}) + (\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{AO}})\\ &= 2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CO}}) - (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})\end{aligned}$$

donc
$$2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CO}}) = (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}).$$
De même
$$2(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}}).$$
Or
$$(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB}}) = \widehat{0}.$$
Ainsi
$$2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}).$$
Ceci signifie que le double de l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ ne dépend pas de $C \in \mathcal{C} \setminus \{A, C\}$ et il est égal à l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$. On a ainsi
$$2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$$
si $D \in \mathcal{C} \setminus \{A, C\}$. Ceci donne en *divisant par 2*
$$(\widehat{(CA),(CB)}) = (\widehat{(DA),(DB)})$$
si $D \in \mathcal{C} \setminus \{A, C\}$.

Il nous reste à montrer la réciproque à savoir que si
$$(\widehat{(CA),(CB)}) = (\widehat{(DA),(DB)})$$
alors $D \in \mathcal{C}\setminus\{A, C\}$. Notons $\delta$ la tangente à $\mathcal{C}$ en $A$. Le cercle $\mathcal{C}$ est caractérisé par le triplet $(A, B, C)$ mais il est aussi caractérisé par le triplet $(A, B, \delta)$ : étant donnés deux points distincts du plan et une droite qui passe par le premier point et qui évite le second, il existe un et un seul cercle qui passe par les deux points et qui est tangent à la droite. Nous allons montrer que
$$(\widehat{\delta, (AB)}) = (\widehat{(CA),(CB)}).$$
On sait déjà que
$$2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}).$$
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\delta$. On a
$$(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{AO}}) + (\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}}).$$

On a aussi

$$(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}})$$

et donc

$$2(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AO}}).$$

De plus puisque $\delta$ est la tangente à $\mathcal{C}$ en $A$ on a

$$2(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{AO}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AO}}).$$

Or

$$2(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AO}}) = \widehat{0}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} 2(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{AB}}) &= 2(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{AO}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}}) \\ &= (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AO}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AO}}) \\ &= (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \\ &= 2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}). \end{aligned}$$

En *divisant par 2* on obtient

$$(\widehat{\delta,(AB)}) = (\widehat{(CA),(CB)}).$$

Soit maintenant $D$ tel que

$$(\widehat{(CA),(CB)}) = (\widehat{(DA),(DB)}).$$

D'après ce qui précède, le cercle qui passe par $A$, $B$ et $D$ admet $\delta$ comme tangente en $A$. C'est donc le cercle qui passe par $A$, $B$ et $C$.

Le troisième critère de cocyclicité est lié à la notion de puissance d'un point à un cercle. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O$ et de rayon $R$ et soit $M$ un point hors de $\mathcal{C}$. Si $\delta$ est une droite qui passe par $M$ et qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points $P_1$ et $P_2$ éventuellement confondus alors

$$\overrightarrow{MP_1} \cdot \overrightarrow{MP_2} = \overrightarrow{MO}^2 - R^2.$$

On prouve ce résultat en introduisant le point $P_3$ qui est diamétralement opposé à $P_1$. On a $\overrightarrow{OP_3} = -\overrightarrow{OP_1}$ et on sait que

$$\overrightarrow{P_2P_1} \cdot \overrightarrow{P_2P_3} = 0.$$

Ceci implique, puisque $M$, $P_1$ et $P_2$ sont alignés que

$$\overrightarrow{MP_1} \cdot \overrightarrow{P_3P_2} = 0.$$

On a donc

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{MP_1} \cdot \overrightarrow{MP_2} & = & \overrightarrow{MP_1} \cdot (\overrightarrow{MP_3} + \overrightarrow{P_3P_2}) \\ & = & \overrightarrow{MP_1} \cdot \overrightarrow{MP_3} \\ & = & (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP_1}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP_3}) \\ & = & (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP_1}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OP_1}) \\ & = & \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OP_1}^2 \\ & = & \overrightarrow{MO}^2 - R^2.\end{array}$$

Observons déjà que si $P_2'$ est un point de la droite $(MP_1)$ différent de $P_2$ alors

$$\overrightarrow{MP_1} \cdot \overrightarrow{MP_2'} \neq \overrightarrow{MP_1} \cdot \overrightarrow{MP_2}.$$

Considérons maintenant quatre points distincts $A$, $B$, $C$ et $D$ tels que les droites $(AC)$ et $(BD)$ s'intersectent en un point cinquième point $M$. Ainsi $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés et définissent un cercle $\mathcal{C}$. Si on note $O$ son centre et $R$ son rayon on obtient d'après ce qui précède que $D$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}^2 - R^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}.$$

La preuve du dernier critère va reposer sur une inversion. On oriente le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ on choisit une base orthonormée directe $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et on repère les points du plan par leurs coordonnées polaires relativement à $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ : $M(r, \theta)$ si $||\overrightarrow{AM}|| = r$ et si $\theta$ est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}})$. On considère l'inversion $f$ définie sur $\mathcal{P} \setminus \{A\}$ dans lui-même qui à $M$ associe le point $f(M)$ qui vérifie

$$\overrightarrow{Af(M)} = \frac{1}{||\overrightarrow{AM}||^2}\overrightarrow{AM}.$$

En particulier

$$||\overrightarrow{AM}|| \cdot ||\overrightarrow{Af(M)}|| = 1.$$

Si $M \in \mathcal{P} \setminus \{A\}$ a pour coordonnées $(r, \theta)$ alors $f(M)$ a pour coordonnées $(\frac{1}{r}, \theta)$. L'inversion $f$ est une involution : $f \circ f(M) = M$ si $M \in \mathcal{P} \setminus \{A\}$

et elle vérifie plusieurs propriétes remarquables. Il est immédiat que si $\delta$ est une droite qui passe par $A$ alors $f(\delta \setminus \{A\}) = \delta \setminus \{A\}$. On va montrer que l'inversion $f$ échange les droites qui évitent $A$ et les cercles qui passent par $A$. La preuve repose sur l'expression en coordonnées polaires d'un cercle qui passe par $A$ et d'une droite qui évite $A$.

Considérons un cercle $\mathcal{C}_{R_0,\theta_0}$ qui passe par $A$ et dont le centre est le point $O$ de coordonnées $(R_0, \theta_0)$. Notons $A'$ le point de $\mathcal{C}_{R_0,\theta_0}$ diamétralement opoosé à $A$. En utilisant le fait qu'un point $M \in \mathcal{P} \setminus \{A\}$ appartient à $\mathcal{C}_{R_0,\theta_0}$ si et seulement si le triangle $(A, A', M)$ est rectangle en $M$ on obtient

$$\mathcal{C}_{R_0,\theta_0} = \{M : \exists\theta \in ]\theta_0-\frac{\pi}{2}, \theta_0+\frac{\pi}{2}[, ||\overrightarrow{AM}|| = 2R_0 \cos(\theta-\theta_0), \mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}}) = \theta\}.$$

Considérons aussi une droite $\delta_{R_0,\theta_0}$ qui évite l'origine et telle que le projeté orthogonal $H$ de $A$ sur $\delta_{R_0,\theta_0}$ ait pour coordonnées $(R_0, \theta_0)$. En utilisant le fait qu'un point $M \in \mathcal{P}\setminus\{H\}$ appartient à $\delta_{R_0,\theta_0}$ si et seulement si le triangle $(A, M, H)$ est rectangle en $H$ on obtient

$$\delta_{R_0,\theta_0} = \{M : \exists\theta \in ]\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2}[, ||\overrightarrow{AM}|| = \frac{R_0}{\cos(\theta - \theta_0)}, \mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}}) = \theta\}.$$

On déduit de l'expression en coordonnées polaires de $f$, des cercles qui passent par $A$ et des droites qui évitent $A$ que

$$f(\mathcal{C}_{R_0,\theta_0}) = \delta_{\frac{1}{2R_0},\theta_0} \text{ et } f(\delta_{R_0,\theta_0}) = \mathcal{C}_{\frac{1}{2R_0},\theta_0}.$$

L'inversion de pôle $A$ possède une autre propritété remarquable : si $M, N \in \mathcal{P} \setminus \{A\}$, alors $(A, M, N)$ et $(A, f(N), f(M))$ sont semblables. En effet les angles géométriques $\widehat{MAN}$ et $\widehat{f(N)Af(M)}$ sont les mêmes et

$$||\overrightarrow{AM}|| \cdot ||\overrightarrow{Af(M)}|| = 1 = ||\overrightarrow{AN}|| \cdot ||\overrightarrow{Af(N)}||$$

et donc

$$\frac{||\overrightarrow{AM}||}{||\overrightarrow{AN}||} = \frac{||\overrightarrow{Af(N)}||}{||\overrightarrow{Af(M)}||}.$$

On en déduit que

$$\frac{||\overrightarrow{AM}||}{||\overrightarrow{Af(N)}||} = \frac{||\overrightarrow{AN}||}{||\overrightarrow{Af(M)}||} = \frac{||\overrightarrow{MN}||}{||\overrightarrow{f(N)f(M)}||}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le dernier critère. On considère quatre points distincts $A$, $B$, $C$ et $D$.

Supposons d'abord que $A$, $B$, $C$ et $D$ sont alignés et que $A$, $B$ et $C$ sont dans cet ordre. On mesure algébrique les distance sur $(AB)$ en comptant positivement la mesure algébrique $\overline{AB}$. On a donc $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$ strictement positifs. De plus les trois nombres $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ et $\overline{CD}$ sont de même signe si et seulement si $D \notin [A, C]$. On a

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{BD} &= (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot (\overline{BC} + \overline{CD'}) \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}) \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}. \end{aligned}$$

En passant aux normes on obtient

$$||\overrightarrow{AC}|| \cdot ||\overrightarrow{BD}|| \leq ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{CD}|| + ||\overrightarrow{BC}|| \cdot ||\overrightarrow{AD}||$$

et l'égalité n'a lieu que si $D \notin [A, C]$.

Supposons maintenant que $A$, $B$, $C$ et $D$ ne sont pas alignés. Quitte à renommer les points on peut supposer que $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés. Ils définissent un cercle $\mathcal{C}$. On note $f$ l'inversion de pôle $A$ et on pose $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ et $D' = f(D)$. L'image de $\mathcal{C} \setminus \{A\}$ par l'inversion $f$ de pôle $A$ est une droite $\delta$ qui contient les points $B'$ et $C'$. Par construction on a d'une part

$$||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AB'}|| = ||\overrightarrow{AC}|| \cdot ||\overrightarrow{AC'}|| = ||\overrightarrow{AD}|| \cdot ||\overrightarrow{AD'}|| = 1$$

et d'autre part

$$\frac{||\overrightarrow{B'C'}||}{||\overrightarrow{CB}||} = \frac{||\overrightarrow{AB'}||}{||\overrightarrow{AC}||} = \frac{||\overrightarrow{AC'}||}{||\overrightarrow{AB}||}$$

$$\frac{||\overrightarrow{C'D'}||}{||\overrightarrow{DC}||} = \frac{||\overrightarrow{AC'}||}{||\overrightarrow{AD}||} = \frac{||\overrightarrow{AD'}||}{||\overrightarrow{AC}||}$$

$$\frac{||\overrightarrow{B'D'}||}{||\overrightarrow{CB}||} = \frac{||\overrightarrow{AB'}||}{||\overrightarrow{AD}||} = \frac{||\overrightarrow{AD'}||}{||\overrightarrow{AB}||}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{B'C'}|| &= \frac{||\overrightarrow{BC}||}{||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}||} \\ ||\overrightarrow{C'D'}|| &= \frac{||\overrightarrow{CD}||}{||\overrightarrow{AC}|| \cdot ||\overrightarrow{AD}||} \\ ||\overrightarrow{B'D'}|| &= \frac{||\overrightarrow{BD}||}{||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AD}||}. \end{aligned}$$

Or

$$||\overrightarrow{B'D'}|| \leq ||\overrightarrow{B'C'}|| + ||\overrightarrow{C'D'}||$$

et il y a égalité si et seulement si $C' \in ]B', D'[$ c'est à dire si et seulement si $B'$, $C'$ et $D'$ sont alignés dans cet ordre ce qui revient à dire que $A$, $B$, $C$ et $D$ sont sur le cercle $\mathcal{C}$ et dans cet ordre. Par conséquent en remplaçant $||\overrightarrow{B'D'}||$, $||\overrightarrow{B'C'}||$ et $||\overrightarrow{C'D'}||$ par leurs expressions respectives en fonction de $||\overrightarrow{AB}||$, $||\overrightarrow{AC}||$, $||\overrightarrow{AD}||$, $||\overrightarrow{BC}||$, $||\overrightarrow{BD}||$ et $||\overrightarrow{CD}||$ et en réduisant au même dénominateur on obtient

$$||\overrightarrow{AC}|| \cdot ||\overrightarrow{BD}|| \leq ||\overrightarrow{AD}|| \cdot ||\overrightarrow{BC}|| + ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{CD}||.$$

L'égalité n'a lieu que si $A$, $B$, $C$ et $D$ appartiennent à $\mathcal{C}$ et sont dans cet ordre sur le cercle $\mathcal{C}$.