Géométrie au Capes 2007-2008
Solutions des exercices 1 à 8

exercice 1 J'appelle x la durée de vie de Diophante, y l'âge de Diophante au moment de la naissance de son fils, et z la durée de vie de ce dernier.

Du "La jeunesse de Diophante a duré un sixième de sa vie ; un douzième plus tard, ses joues se couvrirent de barbe. Il passa encore le septième de sa vie avant de prendre une épouse et, cinq ans après, il eut un enfant" de la version 1 ou du "Des jours assez nombreux que lui compta le sort, Le sixième marqua le temps de son enfance ; Le douzième fut pris par son adolescence. Des septs parts de sa vie, une encore s'écoula, Puis s'étant marié, sa femme lui donna Cinq ans après un fils" de la version 2 on déduit l'égalité

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 = \frac{11}{28}x + 5.$$

Du "Son père lui survécut quatre ans" de la version 1 ou du "De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut" de la version 2 on déduit l'égalité

$$x = (y + z) + 4$$

c'est à dire d'après ce qui précède

$$\frac{17}{28}x - z = 9.$$

Le "un fils, qui, du destin sévère, Reçut de jours hélas ! deux fois moins que son père" de la version 2 implique sans ambiguïté

$$2z = x$$

ce qui entraîne

$$\frac{3}{28}x = 9$$

ou

$$x = 81.$$

Diophante mourut à 84 ans.

Sur ce point la version 1 souffre d'une imprécision qui peut conduire à une erreur d'interprétation. Le "il eut un enfant qui, après avoir atteint la moitié de l'âge de son père, périt d'une mort malheureuse" de la version 1 n'est pas clair. Il peut être interprété comme

$$2z = x.$$

Ceci donnerait le 84 recherché. Mais on peut hélas aussi considérer que cette phrase signifie que l'âge atteint par Diophante au moment du décès de son fils est le double de celui de ce dernier au même moment c'est à dire

$$2z = y + z$$

ou encore

$$y = z.$$

Ce implique que

$$x = 2y + 4$$

c'est à dire

$$x = \frac{22}{28} + 14$$

ou

$$x = \frac{196}{3}.$$

Diophante serait à 65 ans et 4 mois. Ce résultat n'est pas très sérieux pour un arithméticien de car ce n'est pas un entier. L'auteur de la première version n'avait probablement pas réalisé l'imprécision de son énoncé.

exercice 2 Il est demandé de montrer que si (A, B, C) est un triangle d'un plan affine euclidien on a $AC = BC$ si et seulement si $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$.

On supposera de plus que A, B et C ne sont pas alignés, sans quoi on peut trouver des configurations qui infirment l'énoncé. Par exemple, si $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ (c'est l'angle nul) mais $BC = 2AC$.

Observons que les angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ sont a priori des angles orientés de vecteurs mais on peut donner un énoncé similaire avec des angles géométriques.

Le cas des angles géométriques On note $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ les mesures des angles géométriques aux sommets du triangle. Ce sont des réels compris entre $]0, \pi[$ car A, B et C ne sont pas alignés. Leur somme $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$ vaut π. On note H le pied de la hauteur issue de C. On $AC \sin(\widehat{A}) = BC \sin(\widehat{B}) = HC$.

Supposons d'abord que $\widehat{A} = \widehat{B}$. Puisque $\widehat{A} = \widehat{B} \in]0, \pi[$ on a $\sin(\widehat{A}) = \sin(\widehat{B}) \neq 0$ et on déduit de $AC \sin(\widehat{A}) = BC \sin(\widehat{B})$ que $AC = BC$.

Réciproquement supposons maintenant que $AC = BC$. Alors $\sin(\widehat{A}) = \sin(\widehat{B})$. Ceci permet de conclure que $\widehat{A} = \widehat{B}$ ou que $\widehat{A} = \pi - \widehat{B}$ puisque $\widehat{A}, \widehat{B} \in]0, \pi[$. On va montrer que le second cas mène à une contradiction. Si

$\widehat{A} = \pi - \widehat{B}$ alors $\widehat{C} = \pi - \widehat{B} - \widehat{A} = 0$. Ceci est impossible car $\widehat{C} \in]0, \pi[$. Par conséquent, si $AC = BC$ alors $\widehat{A} = \widehat{B}$.

Le cas des angles orientés de vecteurs (preuve avec rappels)

Supposons d'abord que $AC = BC$. Puisque A, B et C sont trois points non alignés d'un plan affine ils déterminent un repère affine et si A', B' et C' sont trois points de ce plan il existe une et une seule application affine qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C'. Soit ρ l'unique application affine telle que $\rho(A) = B$, $\rho(B) = A$ et $\rho(C) = C$. C'est une isométrie car

$$AB = \rho(A)\rho(B)$$

et

$$\rho(B)\rho(C) = AC = BC = \rho(A)\rho(C).$$

Montrons que ρ est indirecte. Pour le voir il va nous suffire de montrer que le déterminant d'une matrice représentant la partie linéaire de ρ dans une base quelconque du plan vectoriel dirigeant le plan affine est négatif. Puisque A, B et C ne sont pas alignés le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CB}$ est une base. La matrice L de la partie linéaire de ρ exprimée dans cette base est

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est -1. Ainsi ρ est une isométrie indirecte. Par conséquent

$$\begin{aligned} (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) &= -(\widehat{\overrightarrow{\rho(B)\rho(C)}, \overrightarrow{\rho(B)\rho(A)}}) \\ &= -(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) \\ &= (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}). \end{aligned}$$

Ainsi si $AC = BC$ alors $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$.

Dans ce qui précède on aurait pu observer que C et sur la médiatrice de (A, B) et que ρ est la réflexion par rapport à cette droite.

Montrons la réciproque. On suppose $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$. Soit δ la médiatrice de (A, B). C'est par définition le lieu des points du plan euclidien qui sont à égal distance de A et B. Selon un résultat connu c'est une droite orthogonale à (AB) et qui passe par le milieu de (A, B). Soit ρ la réflexion par rapport à δ. C'est une isométrie indirecte. Elle transforme tout angle orienté de vecteurs en son opposé. C'est une involution (son carré est l'identité) telle que $\rho(A) = B$, $\rho(B) = A$ et dont l'ensemble des points fixes est la médiatrice δ. De plus si $X \notin \delta$ alors $X \neq \rho(X)$, $(X\rho(X))$ et δ sont orthogonales et ont comme unique point commun le milieu de $(X, \rho(X))$. Pour montrer que $AC = BC$ il suffit de montrer que $C = \rho(C)$. On a

$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) &= (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \\
&= -(\widehat{\overrightarrow{\rho(A)\rho(B)}, \overrightarrow{\rho(A)\rho(C)}}) \\
&= -(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\rho(C)}}) \\
&= (\widehat{\overrightarrow{B\rho(C)}, \overrightarrow{BA}}).
\end{aligned}$$

De l'égalité angulaire $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{B\rho(C)}, \overrightarrow{BA}})$ on déduit que $\rho(C)$ est sur la droite (BC). En permutant A et B on montre que $\rho(C)$ est sur la droite (AC). Finalement $\rho(C)$ est à l'intersection des droites (BC) et (AC) qui sont non confondues car A, B et C ne sont pas alignés. Ainsi $\rho(C) = C$ et $AC = BC$. On a prouvé la réciproque : si $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ alors $AC = BC$.

Pour montrer que $\rho(C) = C$ après avoir montré que $\rho(C)$ est sur la droite (BC) on peut aussi supposer que $\rho(C) \neq C$ et rechercher une contradiction. Si $\rho(C) \neq C$ alors B appartiendrait aux droites $(C\rho(C))$ et $(BA) = (B\rho(B))$ qui sont toutes deux orthogonales à δ. Ces deux droites seraient donc confondues et A, B et C seraient alignés : c'est la contradiction recherchée.

Le cas des angles orientés de vecteurs (preuve concise) Soit δ la médiatrice de (A, B) et ρ la réflexion par rapport à δ. La réflexion ρ par rapport à la médiatrice δ de (A, B) échange A et B et c'est une isométrie indirecte : elle transforme un angle orienté en son opposé.

Supposons d'abord que $AC = BC$. Le point C est donc sur δ et il est fixé par ρ. Ainsi

$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) &= -(\widehat{\overrightarrow{\rho(B)\rho(C)}, \overrightarrow{\rho(B)\tau(A)}}) \\
&= -(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) \\
&= (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}).
\end{aligned}$$

Ainsi si $AC = BC$ alors $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$.

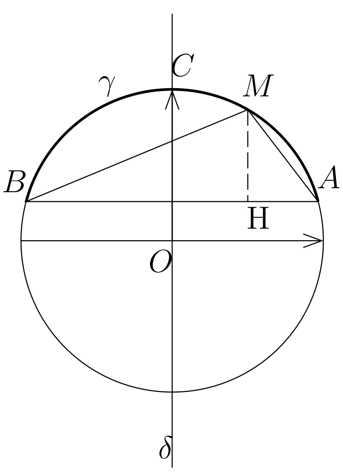
Prouvons la réciproque. On suppose $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$. Pour montrer que $AC = BC$ c'est à dire que $C \in \delta$ il suffit de montrer que $C = \rho(C)$.

On a

$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) &= (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \\
&= -(\widehat{\overrightarrow{\rho(A)\rho(B)}, \overrightarrow{\rho(A)\rho(C)}}) \\
&= -(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\rho(C)}}) \\
&= (\widehat{\overrightarrow{B\rho(C)}, \overrightarrow{BA}}).
\end{aligned}$$

De l'égalité angulaire $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{B\rho(C)}, \overrightarrow{BA}})$ on déduit que $\rho(C)$ est sur la droite (BC). En permutant A et B on montre que $\rho(C)$ est sur la droite (AC). Finalement $\rho(C)$ est à l'intersection des droites (BC) et (AC) qui sont non confondues car A, B et C ne sont pas alignés. Ainsi $\rho(C) = C$ et $AC = BC$. On a prouvé la réciproque : si $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ alors $AC = BC$.

exercice 3



Soit δ la médiatrice de (A, B). Soit δ la médiatrice de (A, B). Ces droites sont orthogonales. Puisque A et B sont deux points d'un cercle de rayon 1, le centre O de ce cercle est sur la médiatrice. Puisque $\{C\} = \delta \cap \mathcal{C}$, le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OC}$ est unitaire et dirige δ.. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Puisque δ et (A, B) sont orthogonales, le vecteur $\overrightarrow{v}$ dirige (AB). Le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base othonormée de la direction du plan affine euclidien et le triplet $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère affine dans lequel δ a pour équation $xy = 0$, $\mathcal{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 = 1$ et les coordonnées de C sont $(1, 0)$. De plus, si on note (x_0, y_0) les coordonnées de A alors celles de B sont $(x_0, -y_0)$ car la réflexion par rapport à δ échange ces points. Enfin, les points M de γ sont les points de $\mathcal{C}$ de coordonnées (x, y) avec $x \in [x_0, 1]$.

1. Si $M \in \gamma$ de coordonnées (x, y) avec $x \in [x_0, 1]$ alors le pied de la hauteur du triangle (A, B, M) issue de M est H de coordonnées (x_0, y). La hauteur vaut $MH = (x - x_0)$, la base $AB = 2y_0$ et l'aire $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}AB \cdot MH = y_0(x - x_0)$. Puisque $x \in [x_0, 1]$ l'aire est maximale si et seulement si $x = 1$, c'est à dire si et seulemnt si $M = C$.

2. Soit $M \in \gamma$ comme précédemment. On note $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{M}$ les mesures des angles géométriques du triangle (A, B, M) en chacun de ses sommets. On a donc $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{M} = \pi$.

On note $\widehat{C}$ la mesure de l'angle géométrique en C du triangle (A, B, C). D'après *la relation des sinus dans un triangle* on a

$$\frac{BM}{\sin(\widehat{A})} = \frac{MA}{\sin(\widehat{B})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{M})}.$$

Or, puisque M et C sont sur le même arc de cercle γ d'extrémités A et B les angles $\widehat{M}$ et $\widehat{C}$ sont égaux. Par conséquent le rapport

$$\frac{BM}{\sin(\widehat{A})} = \frac{MA}{\sin(\widehat{B})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{C})}$$

est indépendant de $M \in \gamma$. Ainsi le périmètre $\mathbf{P}$ du triangle (A, B, M) vaut

$$\mathbf{P} = AB + BM + MA = AB \cdot (1 + \frac{1}{\sin(\widehat{C})}(\sin(\widehat{A}) + \sin(\widehat{B})).$$

Mais

$$\begin{aligned} \sin(\widehat{A}) + \sin(\widehat{B}) &= 2\sin(\tfrac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B}))\cos(\tfrac{1}{2}(\widehat{A} - \widehat{B})) \\ &= 2\sin(\tfrac{1}{2}(\pi - \widehat{C}))\cos(\tfrac{1}{2}(\widehat{A} - \widehat{B})). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbf{A}B \cdot (1 + \frac{2}{\sin(\widehat{C})}\sin(\frac{1}{2}(\pi - \widehat{C}))\cos(\frac{1}{2}(\widehat{A} - \widehat{B})))$$

est maximal si et seulement si $\cos(\frac{1}{2}(\widehat{A} - \widehat{B})) = 1$ c'est à dire si et seulement si $\widehat{A} = \widehat{B}$. Dans ce cas le triangle est isocèle et $M = C$.

3. Une fonction n'atteint pas toujours un maximum même si elle est bornée. Nous devons donc prouver d'abord qu'il existe des triangles d'aire maximale parmi les triangles inscrits dans $\mathcal{C}$.

L'aire d'un triangle (A, B, C) est égale à la moitié de la valeur absolue du déterminant de la matrice $(2, 2)$ dont les colonnes sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ exprimées dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. L'aire est donc une fonction continue des coordonnées de A, B et C exprimées dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Par conséquent la fonction qui à un triangle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ associe son aire est une fonction continue définie sur le compact $\mathcal{C}^3$. Elle atteint un maximum. Il existe donc des triangles d'aire maximale parmi les triangles inscrits dans $\mathcal{C}$.

Considérons un triangle inscrit dans $\mathcal{C}$ et qui ne soit pas équilatéral. On peut nommer les sommets par A, B et M de telle sorte que $AM \neq BM$. D'après la question 1 il existe $C \neq M$ sur $\mathcal{C}$ tel que l'aire du triangle (A, B, C) soit strictement plus grande que celle de (A, B, M). Ainsi l'aire ne peut être maximale que si le triangle est équilatéral. Or tous les triangles équilatéraux inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$ sont isométriques (en effet la longueur d'un côté d'un triangle équilatéral s'exprime en fonction du rayon du cercle circonscrit et dans notre cas le rayon est 1) et ont donc même aire. Par conséquent les triangles d'aire maximale inscrits dans $\mathcal{C}$ sont les triangles équilatéraux.

4. On raisonne comme dans la question 3 en remplaçant l'aire par le périmètre du triangle.

Le périmètre d'un triangle (A, B, C) est égal à la somme des longueurs des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$. Le périmètre est donc une fonction continue des coordonnées de A, B et C exprimées dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Or $\mathcal{C}$ est un compact de $\mathbf{R}^2$ et donc $\mathcal{C}^3$ est un compact de $\mathbf{R}^6$. Par conséquent la fonction qui à un triangle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ associe son périmètre est une fonction continue définie sur le compact $\mathcal{C}^3$. Elle atteint un maximum. Il existe donc des triangles de périmètre maximal parmi les triangles inscrits dans $\mathcal{C}$.

Considérons un triangle inscrit dans $\mathcal{C}$ et qui ne soit pas équilatéral. On peut nommer les sommets par A, B et M de telle sorte que $AM \neq BM$. D'après la question 2 il existe $C \neq M$ sur $\mathcal{C}$ tel que le périmètre du triangle (A, B, C) soit strictement plus grand que celui de (A, B, M). Ainsi le périmètre ne peut être maximal que si le triangle est équilatéral. Or tous les triangles équilatéraux inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$ sont isométriques et ont donc même périmètre. Par conséquent les triangles de périmètre maximal inscrits dans $\mathcal{C}$ sont les triangles équilatéraux.

5. et 6. Soient $A_1, ..., A_n$ les sommets d'un polygône $\mathcal{P}$ inscrit dans $\mathcal{C}$. On

les suppose ordonnés en fonction de leurs arguments

$$0 \leq \theta_1 \leq ... \leq \theta_n < 2\pi$$

mais on accepte que certains sommets successifs soient confondus. On pose $A_{n+1} = A_1$ et $\theta_{n+1} = \theta_1$. Le périmètre du polygône est

$$\mathbf{P}(\mathcal{P}) = 2\sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{1}{2}(\theta_{k+1} - \theta_k)).$$

En décomposant ce polygône en n triangles (O, A_k, A_{k+1}) avec $k \in \{1, ..., n\}$ on vérifie que l'aire de $\mathcal{P}$ est égale à

$$\mathcal{A}ire(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \sin(\theta_{k+1} - \theta_k).$$

Les fonctions périmètre et aire sont des fonctions continues de $\theta = (\theta_1, ...\theta_n)$ qui vit dans le compact

$$K = \{\theta = (\theta_1, ...\theta_n) : 0 \leq \theta_1 \leq ... \leq \theta_n < 2\pi\}.$$

Elles atteignent donc des maxima.

Montrons que ces maxima sont atteints pour les polygônes réguliers. On considère le polygône $\mathcal{P}'$ de sommets $A_2, ..., A_n$. Le polygône $\mathcal{P}'$ est inclus dans $\mathcal{P}$ et on a

$$\mathbf{P}(\mathcal{P}) = \mathbf{P}(\mathcal{P}') - 2 * A_2A_n + \mathbf{P}(A_1, A_2, A_n)$$

et

$$\mathcal{A}ire(\mathcal{P}) = \mathcal{A}ire(\mathcal{P}') + \mathcal{A}ire(A_1, A_2, A_n).$$

Soit A_1' d'argument $\frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_n)$. Les points A_1 et A_1' sont sur le même arc de $\mathcal{C} \setminus \{A_2, A_n\}$ et (A_1', A_2, A_n) est isocèle en A_1'. D'après les questions 1 et 2, si $A_1 \neq A_1'$ (c'est à dire si $A_nA_1 \neq A_1A_2$) alors $\mathbf{P}(A_1, A_2, A_n) < \mathbf{P}(A_1', A_2, A_n)$ et $\mathcal{A}ire(A_1, A_2, A_n) < \mathcal{A}ire(A_1', A_2, A_n)$. Par conséquent le périmètre et l'aire de $\mathcal{P}$ ne sont ni l'un ni l'autre maximaux. Ce qui vaut pour A_1 vaut de la même façon pour les autres sommets. Ainsi les polygônes réguliers à n côtés ont une aire et un périmètre maximaux parmi les polygônes à au plus n côtés inscrits dans $\mathcal{C}$.

exercice 4 Voici quelques éléments à connaître pour faire les constructions demandées.

Éléments théoriques Si G est le barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c) avec t $a + b \neq 0$ alors G est le barycentre de $(G', a + b)$ et (C, c) avec G' barycentre de (A, a) et (B, b) (associativité du barycentre).

Si est le barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c) avec et si $\lambda \neq 0$ alors G est le barycentre de $(A, \lambda a)$, $(B, \lambda b)$ et $(C, \lambda c)$ (homgénéité du barycentre).

Éléments pratiques Si G est le barycentre de (A, a) et (B, b) avec $a, b \in \mathbf{N}$ alors $G \in [A, B]$ et $AG = \frac{b}{a+b} AB$.

Si G est le barycentre de (A, a) et $(B, -b)$ avec $0 < b < a \in \mathbf{N}$ alors G est sur la demi-droite d'extrémité A contenue dans $(A, B) \setminus [A, B]$ et $AG = \frac{b}{a-b} AB$.

Pour diviser le segment $[A, B]$ en n parties égales à la règle et au compas on procède de la façon suivante. On trace deux cercles centrés en A et B de rayon arbitraire mais strictement supérieur à $\frac{1}{2}AB$. Les deux points C et D communs aux deux cercles sont tels que (A, C, B, D) est un losange. On trace les demi-droites $[A, C)$ et $[B, D)$. On reporte sur ces deux demi-droites n fois une longueur arbitraire fixée λ. On obtient ainsi $A_0, A_1, ..., A_n$ sur $[A, C)$ $B_0, B_1, ..., B_n$ sur $[B, D)$ avec $A_iA_{i+1} = \lambda = B_iB_{i+1}$. Les segments $[A_i, B_{i+1}]$ coupent le segment $[A, B]$ en n parties égales.

exercice 5 1. Le triplet (A, B, C) est un repère affine. L'enveloppe convexe T de (A, B, C) est l'ensemble des points M dont les coordonnées barycentriques par rapport au repère (A, B, C) sont (x_1, x_2, x_3) avec $0 \leq x_1, x_2, x_3$ et $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Soit f une application affine qui fixe globalement T. Puisque f est affine et que le plus petit espace affine qui contient A, B et C est le plan affine tout entier, tout point du plan affine admet au moins un antécédent par f. L'application f est donc une application affine surjective du plan dans lui même. Puisque le plan est de dimension 2 donc de diemension finie, ceci implique que f est bijective.

On note (a_1, a_2, a_3) les coordonnées barycentriques de $f(A)$, (b_1, b_2, b_3) celles de $f(B)$ et (c_1, c_2, c_3) celles de $f(C)$. Puisque $f(T) = T$ les a_i, les b_i et les c_i sont tous positifs ou nuls. Puisque f est bijective l'ensemble $f(\{A, B, C\})$ a trois éléments. Supposons que $f(\{A, B, C\}) \neq \{A, B, C\}$. Puisque $f(\{A, B, C\})$ a trois éléments ceci implique que l'un des points de $\{A, B, C\}$, A par exemple n'est pas dans $f(\{A, B, C\})$. Nous allons montrer que ceci entraîne une contradiction. Si $A \notin f(\{A, B, C\})$ alors a_2 ou a_3 n'est pas nul, b_2 ou b_3 n'est pas nul et c_2 ou c_3 est non nul. En particulier $a_2 + a_3$, $b_2 + b_3$ et $c_2 + c_3$ sont strictement positifs. De plus, puisque f est affine l'image T par de l'enveloppe convexe de (A, B, C) est l'enveloppe convexe de $(f(A), f(B), f(C))$. En particulier puisque par hypothèse $A \in f(T)$ il existe α, β et γ positifs et de somme égale à 1 tels que A soit le barycentre de $(f(A), \alpha)$, $(f(B), \beta)$ et $(f(C), \gamma)$. Les coordonnées barycentriques de A dans le repère (A, B, C) sont donc $\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1$, $\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2$ et $\alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3$. Elles valent aussi $(1, 0, 0)$. Ainsi $\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = 0$ et $\alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = 0$. Puisque ce sont des sommes de termes positifs on a donc $\alpha a_2 = \beta b_2 = \gamma c_2 = \alpha a_3 = \beta b_3 = \gamma c_3 = 0$. Par conséquent $\alpha(a_2 + a_3)$, $\beta(b_2 + b_3)$ et $\gamma(\alpha_3 + \beta_3)$ sont non nuls. Puisque $a_2 + a_3$, $b_2 + b_3$ et $c_2 + c_3$ sont strictement positifs ceci implique que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ceci n'est pas possible puisque $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

2. On ordonne A, B et C de telle sorte que $AB \leq BC \leq CA$.

Si $AB < BC < CA$ l'identité est la seule isométrie qui fixe globalement (A, B, C).

Si $AB = BC < CA$ la réflexion par rapport à la médiatrice de (AC) et l'identité sont les deux isométries qui fixent globalement (A, B, C).

Si $AB < BC = CA$ la réflexion par rapport à la médiatrice de (AB) et l'identité sont les deux isométries qui fixent globalement (A, B, C).

Si $AB = BC = CA$ les réflexions par rapport à la médiatrice de (AB), à la médiatrice de (BC) et à la médiatrice de (CB), et les rotations d'angle $\frac{2}{3}\pi$ et d'angle $\frac{4}{3}\pi$ (quitte à orienter le plan affine euclidien) sont les isométries qui fixent globalement (A, B, C).

3. Soit $B' \in (AB)$ et $C' \in (AC)$. Les triangles (A, B, C) et (A, B', C') sont semblables si et seulement si il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\overrightarrow{AB'} = \lambda \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \lambda \overrightarrow{AC}$.

exercice 6 On fait le rappel suivant. Soient A, B, C et D quatre points distincts d'un plan affine euclidien.

Le quadruplet (A, B, C, D) est un parallélogramme s'il vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

- (A, C) et (B, D) ont même milieu
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Un parallélogramme est un rectangle s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

- $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BD}\|$
- $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} >= 0$.

Un parallélogramme est un losange s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

- $< \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} >= 0$
- $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$.

1. On a

$$\overrightarrow{A'_1A'_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_4A_3}) = \overrightarrow{A'_4A'_3}$$

et

$$\overrightarrow{B'_1B'_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2B_3}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1B_4} + \overrightarrow{B_4B_3}) = \overrightarrow{B'_4B'_3}.$$

Par conséquent (A'_1, A'_2, A'_3, A'_4) et (B'_1, B'_2, B'_3, B'_4) sont des parallélogrammes.

On a

$$\overrightarrow{A'_1A'_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_3}$$

et

$$\overrightarrow{A'_2A'_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_4}.$$

Or $\|\overrightarrow{A_1A_3}\| = \|\overrightarrow{A_2A_4}\|$ car (A_1, A_2, A_3, A_4) est un rectangle. Par conséquent $\|\overrightarrow{A'_1A'_2}\| = \|\overrightarrow{A'_2A_3}\|$. Puisque (A'_1, A'_2, A'_3, A'_4) est un parallélogramme on en déduit que c'est un losange.

On a

$$\overrightarrow{B'_1B'_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B_3}$$

et

$$\overrightarrow{B'_2B'_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_2B_4}.$$

Or $< \overrightarrow{B_1B_3}, \overrightarrow{B_2B_4} >= 0$ car (B_1, B_2, B_3, B_4) est un losange. Par conséquent $< \overrightarrow{B'_1B'_2}, \overrightarrow{B'_2B'_3} >= 0$. Puisque (B'_1, B'_2, B'_3, B'_4) est un parallélogramme on en déduit que c'est un rectangle.

2. Soit f une application affine qui laisse globalement invariant l'ensemble $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ Soit G le barycentre de (A_1, A_2, A_3, A_4). Puisque f est affine, l'image $f(G)$ est le barycentre de $(f(A_1), (A_2), f(A_3), f(A_4))$. Or $\{A_1, A_2, A_3, A_4\} = \{f(A_1), (A_2), f(A_3), f(A_4)\}$ et le barycentre est invariant par permutation. Par conséquent $f(G) = G$. Puisque (A_1, A_2, A_3, A_4) est un parallélogramme et que G est le milieu de (A_1, A_3) et de (A_2, A_4) c'est ausi le milieu de $(f(A_1), f(A_3))$ et de $(f(A_2), f(A_4))$. Ainsi

$$\{f(A_1), f(A_3)\} = \{A_1, A_3 \text{ et } \{f(A_2), f(A_4)\} = \{A_2, A_4\}$$

ou

$$\{f(A_1), f(A_3)\} = \{A_2, A_4 \text{ et } \{f(A_2), f(A_4)\} = \{A_1, A_3\}.$$

Ceci donne quatre possibilités pour f. De plus pour $i \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ A'_i est le milieu de $(f(A_i), f(A_{i+1}))$. On en déduit le tableau suivant :

$f(A_1)$	$f(A_2)$	$f(A_3)$	$f(A_4)$	$f(A'_1)$	$f(A'_2)$	$f(A'_3)$	$f(A'_4)$
A_1	A_2	A_3	A_4	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4
A_1	A_4	A_3	A_2	A'_4	A'_3	A'_2	A'_1
A_3	A_2	A_1	A_4	A'_2	A'_1	A'_4	A'_3
A_3	A_4	A_1	A_2	A'_3	A'_4	A'_1	A'_3

Dans les quatre cas f laisse globalement invariant $\{A'_1, A'_2, A'_3, A'_4\}$.

3. Si $f(A_1) = A_2$ alors $f((A_1A_3)) = (A_2A_4)$ et $f((A_2A_4)) = (A_1A_3)$. Si de plus f est une rotation alors elle conserve les angles orientés de droites donc

$$((A_1A_3)\widehat{,(}A_2A_4)) = ((A_2A_4)\widehat{,(}A_1A_3)).$$

Ceci implique que les droites (A_1A_3) et (A_2A_4) sont orthogonales ou parallèles. Le second cas est exclu car (A_1, A_2, A_3, A_4) est un rectangle non plat. L'orthogonalité des droites (A_1A_3) et (A_2A_4) implique que le rectangle (A_1, A_2, A_3, A_4) est un losange donc un carré.

4. Le raisonnement fait en 2. utilise deux hypothèses : f affine et (A_1, A_2, A_3, A_4) parallélogramme. Il vaut donc aussi pour (B_1, B_2, B_3, B_4). Dans les quatre cas f laisse globalement invariant $\{B'_1, B'_2, B'_3, B'_4\}$.

5. Si $f(B_1) = B_2$ alors $f(\{B_1, B_3\}) = \{B_2, B_4\}$. Si de plus f est une isométrie alors alors $\|\overrightarrow{B_1, B_3}\| = \|\overrightarrow{B_2, B_4}\|$. Ceci implique que le losange (B_1, B_2, B_3, B_4) est un rectangle donc un carré.

exercice 7 1. Soit (A, B, C) et (A', B', C') deux triangles non dégénérés et semblables d'un plan affine euclidien. Il existe une similitude f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$. Cette similitude est la composée $f = h \circ g$ d'une isométrie g et d'une homothétie h de rapport $\lambda > 0$. L'isométrie g conserve les distances et l'homothétie h les multiplie par λ. Par conséquent f multiplie les distances par λ : si X et Y sont deux points $f(X)f(Y) = \lambda XY$. De plus g et h conservent l'orthogonalité : il en est donc de même pour h. Enfin f, g et h sont des aumorphismes affines : en particulier l'image d'une droite par f, g ou h est une droite.

Soit H le pied de la hauteur à (A, B, C) qui passe par C. Notons $H' = f(H)$. La droite (HC) est orthogonale à (AB) et $H \in (AB)$. Par conséquent $f((HC)) = (H'C')$ est orthogonale à $f((AB)) = (A'B')$ et $H' \in (A'B')$. Ainsi H' est le pied de la hauteur à (A, B, C) qui passe par C'. De plus on a

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{H'C'}{HC} = \lambda.$$

Or

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} AB \cdot HC \text{ et } \mathcal{A} = \frac{1}{2} A'B' \cdot H'C'.$$

Par conséquent

$$\mathcal{A}' = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 \mathcal{A}.$$

2. On va utiliser la notion d'angle orienté de droites et le résultat suivant. Si X, Y, X' et Y' sont quatre points d'un plan affine euclidien tels que $X \neq Y$ $X' \neq Y'$ il existe exactement deux similitudes qui envoient x sur X' et Y sur Y', l'une est directe et l'autre est indirecte.

Soit (A, B, C) un triangle rectangle en C et soit H le pied de la hauteur issue de C.

On a $H \in (AB)$ et $H \neq A, B$. En effet si $H = A$ par exemple alors les droites (AB) et (CB) seraient parallèles car toutes les deux orthogonales à $(AC) = (HC)$. Puisque $B \in (AB) \cap (CB)$ les deux droites seraient en fait égales et A, B et C seraient alignés.

Puisque $H \in (AB)$ et $H \neq A, B$ il existe une unique similitude indirecte f telle que $f(A) = A$ et $f(C) = H$. Puisque $A \neq B$ on a $f(B) \neq f(A) = A$. De plus l'angle orienté de droites $(\widehat{(AC), (AB)})$ est transformé par f en son opposé :

$$(\widehat{(AC), (AB)}) = -(\widehat{(AH), (Af(B)}).$$

Puisque $H \in (AB)$ on a donc

$$(\widehat{(AC), (AB)}) = -(\widehat{(AB), (Af(B)})) = (\widehat{(Af(B)), (AB)}).$$

Les droites (AC) et $(Af(B))$ ont le point A en commun et elles font le même angle orienté avec (AB). Elles sont égales et $f(B) \in (AC)$. Puisque (CB) et (AC) sont orthogonales, c'est encore vraie pour leurs images par f : $(Hf(B))$ et $(AH) = (AB)$ sont orthogonales. Ceci implique que $(Hf(B) = (HC)$ et que $f(B)$ appartient à l'intersection de (AC) et de (HC) : $f(B) = C$. Les triangles (A, B, C) et (A, C, H) sont donc semblables.

En considérant l'unique similitude indirecte g telle que $g(B) = B$ et $g(C) = H$ on montre de même que les triangles (A, B, C) et (C, B, H) sont semblables.

L'inverse d'une similitude est une similitude et la composée de deux similitudes est une similitude. Par conséquent $g \circ f^{-1}$ est une similitude. Elle envoie (A, C, H) sur (C, B, H) qui sont donc semblables.

3. D'après la question 1 appliquée à (A, B, C) et (A, C, H) qui sont semblables puis à (A, B, C) et (C, B, H) qui le sont également on obtient

$$\mathrm{A}ire(A, C, H) = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \mathrm{A}ire(A, B, C)$$

et

$$\mathrm{A}ire(C, B, H) = \left(\frac{CB}{AB}\right)^2 \mathrm{A}ire(A, B, C).$$

4. La similitude $g \circ f^{-1}$ fixe H et envoie la droite (HA) sur la droite (HC) qui est orthogonale. C'est donc un quart de tour qui fixe H composé avec une homothétie positive qui fixe H. Ainsi puisque $g \circ f^{-1}(A) = C$, le point B qui est égal à $g \circ f^{-1}(C)$ est sur la droite (AH) mais pas sur la demi-droite $[H, A)$. Ainsi $H \in]A, B[$. Par conséquent la droite (HC) sépare le triangle plein T de sommets A, B et C en deux triangles pleins T_1 de sommets (A, C, H) et T_2 de sommets (C, B, H) d'intersection le segment $[H, C]$. L'aire de T est donc la somme des aires de T_1 et T_2 :

$$\mathrm{A}ire(A, B, C) = \mathrm{A}ire(A, C, H) + \mathrm{A}ire(C, B, H).$$

5. D'après les question 3 et 4 on a

$$\mathrm{A}ire(A, B, C) = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \mathrm{A}ire(A, B, C) + \left(\frac{CB}{AB}\right)^2 \mathrm{A}ire(A, B, C).$$

En factorisant par $\left(\frac{1}{AB}\right)^2 \mathrm{A}ire(A, B, C)$ qui est non nul on obtient

$$AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

exercice 8 1. Fixons un repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$: $b = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base orthonormale directe. Soit $(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{W})$

un couple de vecteur et soit M la matrice des coordonnées de $(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{W})$ relativement à la base b. Si A est un point de $\mathcal{P}$, alors l'aire (algébrique) du pallélogramme

$$(A, A+\overrightarrow{u}, A+\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, A+\overrightarrow{v}) = \mathbf{P} = \{B \in \mathcal{P} : \exists, x, y \in [0,1] \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{U}+y\overrightarrow{V}\}$$

est égal au déterminant $det(M)$ de M. Si f est une application affine et $\mathbf{f}$ sa partie linéaire alors l'image $f(\mathbf{B})$ est le parallélogramme

$$f(\mathbf{P}) = \{B \in \mathcal{P} : \exists, x, y \in [0,1] \overrightarrow{f(A)B} = x\overrightarrow{\mathbf{f}(U)} + y\overrightarrow{\mathbf{f}(V)}\}.$$

Si F est la matrice de $\mathbf{f}$ dans la base b alors la matrice des coordonnées de $(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{W})$ relativement à cette base est FM. L'aire de $f(\mathbf{P})$ est donc égale à $det(FM)$ c'est à dire $det(F)det(M)$. L'application affine f conserve les aires algébriques des parallélogrammes si et seulement si son déterminant vaut 1. Elle conserve les aires géométriques des parallélogrammes si et seulement si son déterminant vaut 1 ou -1.

2. Le quadruplet (B, A, D, E) est un parallélogramme car $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{u}$. C'est un losange car $\|\overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{AD}\|$. C'est aussi un rectangle car $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux. C'est donc un carré. On raisonne de façon semblable pour montrer que (A, C, F, G) et (B, C, J, I) sont des carrés.

3. D'une part (B, C, J, I) est un carré, d'autre part $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{w} = \overrightarrow{CJ}$. Donc (AH) est parallèle à (CJ). Or $K = (BC) \cap (AH)$ et $L = (IJ) \cap (AH)$. Par conséquent (B, K, L, I) et (K, C, J, L) sont des parallélogrammes. Ce sont des rectangles car $(BK) = (BC) = (KC)$ est orthogonale à (BI) et à (CJ). En raison de la propriété de bilinéarité du déterminant de deux vecteurs on a

$$\begin{aligned}
Aire(B, C, J, I) &= det_b(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}) \\
&= det_b(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{KL}) \\
&= det_b(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KL}) \\
&= det_b(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{KL}) + det_b(\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KL}) \\
&= det_b(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BI}) + det_b(\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KL}) \\
&= Aire(B, K, L, I) + Aire(K, C, J, L).
\end{aligned}$$

4. Une transvection τ du plan affine est une application affine τ dont l'ensemble des points fixes est une droite δ et qui laisse globalement invariante toute droite parallèle à cette droite. Ainsi pour tout point x du plan, $\overrightarrow{x\tau(x)}$ est dans la direction de δ. Une transvection préserve l'aire algébrique car son déterminant est 1. De plus si δ est une droite du plan et si x et y sont deux

points hors de δ mais tels que $\overrightarrow{xy}$ est dans la direction de δ alors il existe une et une seule transvection qui fixe δ et qui envoie x sur y.

Par construction K, L, A et H sont alignés et $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BI}$. Par conséquent les droites (BI) et (AH) sont parallèles et il existe une transvection τ_1 dont les points fixes sont les points de (BI) et qui envoie K sur A. Puisque τ_1 est affine l'image de L par τ_1 est sur la droite $(AH) = (KA)$ et l'image du parallélogramme (B, K, L, I) est un paralléogramme : $(B, A, \tau_1(L), I)$ est un parallélogramme et $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{A\tau_1(L)}$. Donc, puisque $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BI}$ on a $\tau_1(L) = H$. Or, puisque (B, K, L, I) est un parallélogramme $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{BI}$. Ainsi $\tau_1(L) = H$. Ainsi la transvection τ_1 envoie le parallélogramme (B, K, L, I) sur (B, A, H, I) qui est donc un parallélogramme de même aire algébrique.

Un raisonnement semblable montre qu'il existe une transvection τ_1' qui envoie le parallélogramme (K, C, J, L) sur (A, C, J, H) qui est donc un parallélogramme de même aire algébrique.

5. Puisque (B, A, D, E) et (B, A, H, I) sont des parallélogrammes les droites (BA), (DE) et (HI) sont parallèles. De plus, vu le choix de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ les points I et E sont les images des points C et A par la rotation d'angle $\frac{1}{2}\pi$ et de centre B. Puisque (AC) et (AB) sont orthogonales il en est de même pour (EI) et (EB). Or (EB) est orthogonale à (BA) (choix de $\overrightarrow{u}$). Ainsi (EB) est parallèle à (BA). Finalement, (EI) et (DE) et (HI) sont parallèles à (BA). Ceci implique que E, I, H et D sont alignés. De plus puisque $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{BA}$, il existe bien une transvection τ_2 qui envoie le parallélogramme (B, A, H, I) sur le carré (B, A, D, E).

Un raisonnement semblable montre qu'il existe une transvection τ_2' qui envoie le parallélogramme (A, C, J, H) sur le carré (A, C, G, F).

6. Puisque $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})$ est directe et que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AD}$ l'aire algébrique du carré (B, A, D, E) est positive et vaut AB^2.

Puisqu'on est passé de (B, K, L, I) à (B, A, D, E) en composant deux transvections l'aire algébrique du rectangle (B, K, L, I) est AB^2.

Puisque $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{AC})$ est indirecte et que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AF}$ l'aire algébrique du carré (A, C, G, F) est positive et vaut AC^2.

Puisqu'on passe de (K, C, J, L) à (A, C, G, F) en composant deux transvections l'aire algébrique du rectangle (B, K, L, I) est CA^2.

Puisque $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{BC})$ est indirecte l'aire algébrique du carré (B, C, J, I) est BC^2.

Finalement l'égalité $Aire(B, C, J, I) = Aire(B, K, L, I) + Aire(K, C, J, L)$

devient

$$BC^2 = AB^2 + CA^2.$$

7. Remarque. On vient de prouver que les aires algébriques des rectangles (B, K, L, I) et (K, C, J, L) étaient positives. Par conséquent $(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BI})$ et $(\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KL})$ sont directes. Ceci implique que K appartient au segment $[B, C]$.