Division euclidienne des entiers naturels

Jean-Marie Lion
Université de Rennes 1

0. définition Soit $a \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbf{N}$. On appelle *reste* et *quotient* de la *division euclidienne* de b par a des entiers naturels q et r tels que

$$b = qa + r \text{ et } r < a.$$

1. lemme (division euclidienne) *Soit* $a \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ *et* $b \in \mathbf{N}$. *Il existe un unique couple* $(q, r) \in \mathbf{N}^2$ *tel que*

$$b = qa + r \text{ et } r < a.$$

2. preuve Prouvons d'abord l'existence d'un couple (q, r) formé d'un quotient q et d'un reste r de la division euclidienne de b par a. Soit B l'ensemble

$$B = \{n \in \mathbf{N} : \exists k \in \mathbf{N}, n = b - ka\}.$$

L'ensemble B est non vide car $b \in B$ (prendre $k = 0$). Il possède donc un plus petit élément qu'on note r. Or si $n \in B$ et si $n \geq a$ alors l'entier naturel $n - a$ appartient à B. En effet puisque $n \in B$ il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = b - ka$. Par conséquent l'entier naturel $n - a$ vérifie $n - a = b - (k+1)a$ et appartient bien à B. Ainsi le plus petit élément r de B vérifie $r < a$. Puisque $r \in B$ il existe $q \in \mathbf{N}$ tel que $r = b - qa$ c'est à dire $b = qa + r$. L'existence est prouvée.

Considérons un second couple $(q', r') \in \mathbf{N}^2$ tel que

$$b = q'a + r' \text{ et } r' < a.$$

Quitte à permuter les couples (q, r) et (q', r') on peut supposer que $r \geq r'$. Il vient donc

$$(q' - q)a = (r - r') \in \mathbf{N}$$

et $r - r' < a$. Or 0 est le seul entier naturel qui soit un multiple de a en étant strictement plus petit que a. Par conséquent $r - r' = 0$ et puisque $a \neq 0$ alors que $(q' - q)a = 0$ on a aussi q'=q. L'unicité est prouvée.

3. corollaire (la propriété d'Archimède) *Soit* $a \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ *et* $b \in \mathbf{N}$. *Il existe* $k \in \mathbf{N}$ *tel que que* $b < ka$.

4. preuve Soit q et r les entiers naturels qui sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de b par a. On a

$$b = qa + r \text{ et } r < a.$$

Par conséquent $b < qa + a = (q + 1)a$ et $k = q + 1 \in \mathbf{N}$ est un entier naturel qui permet de conclure.