# Desargues, le cas des parallèles

Jean-Marie Lion
Université de Rennes 1

On va montrer le théorème de Desargues dans le cas de deux triangles d'un plan affine qui ont des côtés parallèles. On utilise le fait que l'image d'une droite par une homothétie ou une translation est une droite qui lui est parallèle. On utilise aussi le fait que deux droites du plan qui ne sont pas parallèles ont un et un seul point en commun.

**énoncé 1** *Soient $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$ et $B_3$ six points distincts d'un plan affine. On suppose que les triangles $(A_1, A_2, A_3)$ et $(B_1, B_2, B_3)$ ne sont pas dégénérés. Si $(A_1A_2)//(B_1B_2)$, $(A_2A_3)//(B_2B_3)$ et $(A_3A_1)//(B_3B_1)$ alors $(A_1B_1)$, $(A_2B_2)$ et $(A_3B_3)$ sont concourantes ou parallèles.*

**énoncé 2** *Soient $\delta_1$, $\delta_2$ et $\delta_3$ trois droites distinctes et concourantes ou parallèles d'un plan affine et soient les points $A_1, B_1 \in \delta_1$, $A_2, B_2 \in \delta_2$ et $A_3, B_3 \in \delta_3$. On suppose que $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$ et $B_3$ sont distincts de l'éventuel point d'intersection des droites $\delta_1$, $\delta_2$ et $\delta_3$. Si $(A_1A_2)//(B_1B_2)$ et $(A_2A_3)//(B_2B_3)$ alors $(A_3A_1)//(B_3B_1)$.*

**preuve de l'énoncé 1** Il suffit de montrer que sous les hypothèses de l'énoncé 1, si les droites $(A_1B_1)$, $(A_2B_2)$ et $(A_3B_3)$ ne sont pas parallèles alors elles sont concourantes. On suppose donc que $(A_1B_1)$, $(A_2B_2)$ et $(A_3B_3)$ ne sont pas parallèles. Quitte à permuter les indices on peut supposer qu'il existe un point $O$ du plan tel que $\{O\} = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$. Il reste à montrer que $O \in (A_3B_3)$.

Le point $O$ est nécessairement distinct de $A_1$, $B_1$, $A_2$ et $B_2$. En effet, supposons que $O$ soit égal à l'un des points $A_1$, $B_1$, $A_2$ et $B_2$, par exemple à $A_1$. Alors $A_1 \in (A_2B_2)$ en étant différent de $A_2$ et $B_2$ et donc $(A_2B_2) = (A_1A_2)$. La droite $(A_2B_2)$ serait donc parallèle à $(B_1B_2)$ en contenant $B_2$. Par conséquent $(B_1B_2) = (A_2B_2)$ et donc $B_1 \in (A_1B_1) \cap (A_2B_2) = \{A_1\}$. Ceci impliquerait que $B_1 = A_1 = O$. C'est la contradiction recherchée.

Puisque les droites $(A_1B_1)$ et $(A_2B_2)$ sont concourantes en $O$ distinct de

$A_1$, $B_1$, $A_2$ et $B_2$ on a

$$\begin{aligned}\{A_1\} &= (A_1B_1) \cap (A_1A_2),\\ \{A_2\} &= (A_2B_2) \cap (A_1A_2),\\ \{B_1\} &= (A_1B_1) \cap (B_1B_2),\\ \{B_2\} &= (A_2B_2) \cap (B_1B_2).\end{aligned}$$

Puisque $O \in (A_1B_1)$ en étant différent de $A_1$ et $B_1$ on peut considérer l'homothétie $h$ de centre $O$ qui envoie $A_1$ sur $B_1$.

Puisque $O \in (A_1B_1)$ on a $h(A_1B_1) = (A_1B_1)$. Puisque de plus $O \in (A_2B_2)$ en étant différent de $A_2$ et $B_2$ et puisque $(A_1A_2)//(B_1B_2)$ on a $h(A_2B_2) = (A_2B_2)$ et $h(A_1A_2)$ est la droite qui passe par $B_1 = h(A_1)$ et qui est parallèle à $(A_1A_2)$ c'est à dire la droite $(B_1B_2)$. Par conséquent

$$h(\{A_2\}) \in h(A_2B_2) \cap h(A_1A_2) = (A_2B_2) \cap (B_1B_2) = \{B_2\}$$

et $h(A_2) = B_2$.

L'image $h(A_3A_1)$ est la droite parallèle à $(A_3A_1)$ et qui passe par $h(A_1) = B_1$ c'est à dire $h(A_3A_1) = (B_3B_1)$. De même $h(A_2A_3)$ est la droite parallèle à $(A_2A_3)$ et qui passe par $h(A_2) = B_2$ c'est à dire $h(A_2A_3) = (B_2B_3)$.

Puisque les triangles $(A_1, A_2, A_3)$ et $(B_1, B_2, B_3)$ ne sont pas dégénérés on a

$$\begin{aligned}\{A_3\} &= (A_3A_1) \cap (A_2A_3),\\ \{B_3\} &= (B_3B_1) \cap (B_2B_3).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$h(\{A_3\}) \in h(A_3A_1) \cap h(A_2A_3) = (B_3B_1) \cap (B_2B_3) = \{B_3\}$$

et $h(A_3) = B_3$.

Puisque $B_3$ est l'image de $A_3$ par l'homothétie $h$ de centre $O$ les trois points sont alignés et $O \in (A_3B_3)$.

**preuve de l'énoncé 2**

**Premier cas : $\delta_1$, $\delta_2$ et $\delta_3$ sont distinctes et concourantes en $O$.** Puisque $\{O\} = (\delta_1 \cap \delta_2 \cap \delta_3)$ et que les trois droites sont deux à deux distinctes on a $A_i, B_i \notin \delta_j$ si $i \neq j$ les ensembles $A_1$, $A_2$ et $A_3$ sont distincts, $B_1$, $B_2$ et $B_3$ le sont également et

$$\begin{aligned}\{A_2\} &= \delta_2 \cap (A_1A_2),\\ \{B_2\} &= \delta_2 \cap (B_1B_2),\\ \{A_3\} &= \delta_3 \cap (A_2A_3),\\ \{B_3\} &= \delta_3 \cap (B_2B_3).\end{aligned}$$

Puisque $O$ est supposé distinct de $A_1$ et $B_1$ et que les trois points appartiennent à $\delta_1$ on peut considérer l'homothétie $h$ de centre $O$ et qui envoie $A_1$ sur $B_1$. Puisque $O \in (\delta_1 \cap \delta_2 \cap \delta_3)$ on a $h(\delta_1) = \delta_1$, $h(\delta_2) = \delta_2$ et $h(\delta_3) = \delta_3$.

L'image $h(A_1A_2)$ est la droite qui passe par $B_1 = h(A_1)$ et qui est parallèle à $(A_1A_2)$ c'est à dire la droite $(B_1B_2)$. Par conséquent

$$h(\{A_2\}) \in h(\delta_2) \cap h(A_1A_2) = \delta_2 \cap (B_1B_2) = \{B_2\}$$

et $h(A_2) = B_2$.

L'image $h(A_2A_3)$ est la droite qui passe par $B_2 = h(A_2)$ et qui est parallèle à $(A_2A_3)$ c'est à dire la droite $(B_2B_3)$. Par conséquent

$$h(\{A_3\}) \in h(\delta_3) \cap h(A_2A_3) = \delta_3 \cap (B_2B_3) = \{B_3\}$$

et $h(A_3) = B_3$.

Ainsi $h(A_2A_3) = (B_2B_3)$ et les droites $(A_2A_3)$ et $(B_2B_3)$ sont parallèles.

**Second cas : $\delta_1$, $\delta_2$ et $\delta_3$ sont distinctes et parallèles.** Puisque les trois droites sont deux à deux distinctes les ensembles $A_1$, $A_2$ et $A_3$ sont distincts, $B_1$, $B_2$ et $B_3$ le sont également, $A_i, B_i \notin \delta_j$ si $i \neq j$, et

$$\begin{aligned}
\{A_2\} &= \delta_2 \cap (A_1A_2), \\
\{B_2\} &= \delta_2 \cap (B_1B_2), \\
\{A_3\} &= \delta_3 \cap (A_2A_3), \\
\{B_3\} &= \delta_3 \cap (B_2B_3).
\end{aligned}$$

On peut considérer la translation $\tau$ qui envoie $A_1$ sur $B_1$. Puisque $\delta_1$, $\delta_2$ et $\delta_3$ sont parallèles et que $A_1$ et $B_1$ appartiennent à $\delta_1$ on a $\tau(\delta_1) = \delta_1$, $\tau(\delta_2) = \delta_2$ et $\tau(\delta_3) = \delta_3$.

L'image $\tau(A_1A_2)$ est la droite qui passe par $B_1 = \tau(A_1)$ et qui est parallèle à $(A_1A_2)$ c'est à dire la droite $(B_1B_2)$. Par conséquent

$$\tau(\{A_2\}) \in \tau(\delta_2) \cap \tau(A_1A_2) = \delta_2 \cap (B_1B_2) = \{B_2\}$$

et $\tau(A_2) = B_2$.

L'image $\tau(A_2A_3)$ est la droite qui passe par $B_2 = \tau(A_2)$ et qui est parallèle à $(A_2A_3)$ c'est à dire la droite $(B_2B_3)$. Par conséquent

$$\tau(\{A_3\}) \in \tau(\delta_3) \cap \tau(A_2A_3) = \delta_3 \cap (B_2B_3) = \{B_3\}$$

et $\tau(A_3) = B_3$.

Ainsi $\tau(A_2A_3) = (B_2B_3)$ et les droites $(A_2A_3)$ et $(B_2B_3)$ sont parallèles.