Continuité et dérivabilité de la puissance n-ème et de la racine n-ème

Jean-Marie Lion
Université de Rennes 1

L'objet de ce texte est d'établir la continuité et la dérivabilité de la puissance n-ème et de la racine n-ème en partant de la caractérisation de $\mathbf{R}$ par la propriété de la borne supérieure et en revenant aux définitions de la continuité et de la dérivabilité.

Un exercice d'application intéressant est de reprendre les arguments de ce texte en les simplifiant dans le cas du carré et de la racine carrée.

La propriété de la borne supérieure Le corps $(\mathbf{R}, +, \times)$ est un corps totalement ordonné qui admet la propriété de la borne supérieure. En particulier toute partie A de $\mathbf{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure. C'est un majorant de A qui est plus petit que tous les autres majorants de A. Ceci signifie que si $A \subset \mathbf{R}$ est non vide et s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que tout élément x de A est inférieur ou égal à M (M est un majorant de A) alors il existe un majorant $S \in \mathbf{R}$ de A tel que pour tout réel x appartenant à A et différent de S il existe un réel y strictement plus grand que x et appartenenant à A :

$$\exists S \in \mathbf{R}, [(\forall x \in \mathbf{R}, (x \in A \Rightarrow x \leq S)) \text{ et } (\forall x \in A, x < S \Rightarrow \exists y \in A \cap]x, S])] .$$

lemme 1 *Soient a, b, c et d des réels. On suppose $0 \leq a < b$ et $0 \leq c < d$. Alors $ac < bd$.*

preuve Puisque $0 \leq c$ et $a < b$ on a $ac \leq bc$. Puisque $0 < b$ et $c < d$ on a $bc < bd$. Par transitivité de la relation $\leq$ on a $ac \leq bd$. Si on avait $ac = bd$ on aurait alors $bd \leq bc$ et $bc < bd$. Ce n'est pas possible. Ainsi $ac \neq bd$ et $ac \leq bd$ donc $ac < bd$.

lemme 2 *Soit $n \in \mathbf{N}^*$, K' et K des réels tels que $0 \leq K' < K$ et soient $(a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$. On suppose que pour tout dans $k \in \{1, ..., n\}$ on a $K' \leq |a_k| < K$. Alors*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \text{ et } nK' \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| < nK,$$

et

$$K'^n \leq \left|\prod_{k=1}^{n} a_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |a_k| < K^n.$$

preuve On prouve ce résultat par récurence sur $n \in \mathbf{N}^*$. Au rang $n = 1$ le résultat est une tautologie : si $K' \leq |a_1| < K$ alors

$$1 \cdot K' = K' \leq \left|\sum_{k=1}^{1} a_k\right| = \sum_{k=1}^{1} |a_k| = |a_1| < K = 1 \cdot K$$

et

$$K' \leq \left|\prod_{k=1}^{1} a_k\right| = \prod_{k=1}^{1} |a_k| = |a_1| < K = K^1.$$

Il nous reste à prouver l'hérédité de la propriété. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. On suppose que le résultat est vrai jusqu'au rang n. Soit K un réel positif et soient $(a_1, ..., a_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que pour tout $k \in \{1, ..., n+1\}$ on ait $|a_k| < K$. D'après l'hypothèse de récurence on a

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \text{ et } nK' \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| < nK$$

et

$$\left|\prod_{k=1}^{n} a_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |a_k| < K^n.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| &= \left|\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| + |a_{n+1}| \text{ (inégalité triangulaire)} \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right|.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
nK' + |a_{n+1}| &\leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| + |a_{n+1}| = \left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| &< nK + |a_{n+1}| \text{ (hypothèse de récurence)}\\
nK' + K' &\leq \left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| &< nK + K \text{ (puisque } K' \leq |a_{n+1}| < K)\\
(n+1)K' &\leq \left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| &< (n+1)K.
\end{aligned}$$

De même

$$\left|\prod_{k=1}^{n+1} a_k\right| = \left|\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}\right| = \left|\prod_{k=1}^{n} a_k\right| \cdot |a_{n+1}|.$$

Donc

$$\begin{aligned}
K'^n \cdot |a_{n+1}| &\leq \left|\prod_{k=1}^{n+1} a_k\right| &< K^n \cdot |a_{n+1}| \text{ (hypothèse de récurence)}\\
K'^n \cdot K' &\leq \left|\prod_{k=1}^{n+1} a_k\right| &< K^n \cdot K \text{ (puisque } K' \leq |a_{n+1}| < K)\\
K'^{n+1} &\leq \left|\prod_{k=1}^{n+1} a_k\right| &< K^{n+1}.
\end{aligned}$$

corollaire 1 *Soient a et b des réels positifs et $n \in \mathbf{N}^*$. Si $a < b$ alors $a^n < b^n$.*

preuve On applique le lemme précédent avec $K = b$ et pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ $a_k = a$.

corollaire 2 *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La restriction à $[0, +\infty)$ de la fonction p_n qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $p_n(x) = x^n$ est strictement croissante.*

lemme 3 *Soient a et b appartenant à $\mathbf{R}$ (et plus généralement à un anneau commutatif). Si $n \in \mathbf{N}^*$ alors*

$$a^n - b^n = (a - b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right).$$

preuve On prouve ce résultat par récurence sur n. Au rang $n = 1$ l'égalité est tautologique :

$$a^1 - b^1 = a - b.$$

Il nous reste à prouver l'hérédité de la propriété. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. On suppose que

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned}
a^{n+1} - b^{n+1} &= a(a^n - b^n) + b^n(a-b) \\
&= a\left((a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)\right) + b^n(a-b) \\
&= (a-b)\left(a\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right) + b^n\right) \\
&= (a-b)\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k}\right) + b^n\right) \\
&= (a-b)\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k}\right) + a^0 b^n\right) \\
&= (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right).
\end{aligned}$$

On vient de prouver que sous l'hypothèse

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)$$

on a

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right).$$

Ceci établit l'hérédité de la propriété.

remarque La fonction p_0 qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $p_0(x) = x^0 = 1$ est clairement continue et dérivable de dérivée la fonction nulle.

proposition 1 *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction p_n qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $p_n(x) = x^n$ est continue et dérivable et si $x \in \mathbf{R}$ alors $p_n'(x) = nx^{n-1}$.*

Si $n = 1$ le résultat est immédiat car le taux d'accroissement est 1. on s'intéresse maintenant au cas où $n \geq 2$.

preuve de la continuité Soit $a \in \mathbf{R}$. Montrons que p_n est continue en a. Fixons $\varepsilon > 0$. On pose

$$\delta = \frac{\varepsilon}{n(|a|+1)^{n-1}}.$$

Soit $b \in \mathbf{R}$ tel que $|b-a| < \delta$. D'après l'inégalité triangulaire on a $|b| < |a|+1$. On a aussi $|a| < |a|+1$. D'après le lemme 2 on a donc pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$

$$|a^k b^{n-1-k}| < (|a|+1)^{n-1}.$$

Encore d'après le lemme 2 on a

$$|\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}| < n(|a|+1)^{n-1}.$$

Par conséquent on a

$$\begin{array}{rcl} |a^n - b^n| & = & \left|(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)\right| \text{ (lemme 3)} \\ & = & |a-b| \cdot \left|\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right| \\ & < & \frac{\varepsilon}{n(|a|+1)^{n-1}}(|a|+1)^{n-1} \text{ (d'après les lemmes 1 et 2)} \\ & < & \varepsilon. \end{array}$$

preuve de la dérivabilité et calcul de la dérivée Soit $a \in \mathbf{R}$. Montrons que p_n est dérivable en a et que $p_n'(a) = na^{n-1}$. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit k un entier dans $\{0, ..., n-1\}$. Puisque p_{n-1-k} est continue il existe $\delta_k > 0$ tel que si $|b-a| < \delta_k$ alors $|b^{n-1-k} - a^{n-1-k}| < \frac{\varepsilon}{n(|a|+1)^k}$. Soit δ le minimum de $\{\delta_0, ..., \delta_{n-1}\}$. Alors on a pour tout b tel que $|b-a| < \delta$ et pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$

$$\begin{array}{rcl} |a^k b^{n-1-k} - a^{n-1}| & = & |a^k(b^{n-1-k} - a^{n-1-k})| \\ & = & |a^k| \cdot |b^{n-1-k} - a^{n-1-k}| \\ & < & |a|^k \cdot \frac{\varepsilon}{n(|a|+1)^k} \text{ (en raison du choix de } \delta) \\ & < & \frac{\varepsilon}{n} \text{ (car } \frac{|a|^k}{(|a|+1)^k} < 1). \end{array}$$

Par conséquent d'après le lemme 2 on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(a^k b^{n-1-k} - a^{n-1})\right| < n\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Ainsi pour tout b tel que $|b-a| < \delta$ on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{p_n(a)-p_n(b)}{a-b} - na^{n-1}\right| &= \left|\frac{a^n - b^n}{a-b} - na^{n-1}\right| \\
&= \left|\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right) - na^{n-1}\right| \text{ (lemme 3)} \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}(a^k b^{n-1-k} - a^{n-1})\right| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que p_n est dérivable en a et que $p_n'(a) = na^{n-1}$.

proposition 2 *La fonction inverse qui à $x \in \mathbf{R}^*$ associe $\dfrac{1}{x}$ est continue.*

preuve Soit $a \in \mathbf{R}^*$ et soit $\varepsilon > 0$. On note δ le plus petit des deux nombres $\frac{|a|}{2}$ et $\frac{4\varepsilon}{|a|^2}$. Si $b \in \mathbf{R}^*$ et tel que $|a-b| < \delta$ alors $|a|, |b| > \frac{|a|}{2}$ et $|a-b| < \frac{4\varepsilon}{|a|^2}$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right| &= \frac{|b-a|}{|ab|} \\
&< \frac{\frac{4\varepsilon}{|a|^2}}{\left(\frac{|a|}{2}\right)^2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par conséquent la fonction inverse est bien continue en a.

lemme 4 *Soit $n \in \mathbf{N}$ et a un réel positif. Alors $(1+a)^n \geq 1 + na$.*

preuve Elle se fait par récurence sur n. Au rang $n = 1$ c'est immédiat car $(1+a)^1 = 1 + a$. Il rest à prouver l'hérédité de la propriété. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé.

On suppose que $(1+a)^n \geq 1+na$. Alors

$$\begin{array}{rcl}(1+a)^{n+1} & = & (1+a)^n(1+a) \\ & \geq & (1+na)(1+a) \text{ (par hypothèse de récurence)} \\ & \geq & 1+(n+1)a+na^2 \\ & \geq & 1+(n+1)a \text{ (car } na^2 \geq 0).\end{array}$$

proposition 3*(Existence de la fonction racine n-ème) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et a un réel positif. Il existe un et un seul réel positif $r_n(a)$ tel que $[r_n(a)]^n = a$. Ce réel est appelé racine n-ème de a et il est noté $r_n(a) = a^{\frac{1}{n}}$.*

preuve le résultat est évident si $n = 1$. On fixe $n \geq 2$ et $a \geq 0$. Puisque la restriction à $[0, +\infty)$ de la fonction p_n est strictement croissante (corollaire 2) elle est injective. Par conséquent si $r_n(a)$ existe il est unique. L'ensemble $R = \{x \in [0, +\infty), x^n \leq a\}$ est non vide car il contient 0. De plus puisque p_n est strictement croissante, d'après le lemme 4 si $x > (1+a)$ alors

$$x^n > (1+a)^n \geq 1+na > a.$$

Ainsi $1+a$ est un majorant de l'ensemble R. Puisque R est non vide et admet un majorant, il possède une borne supérieure α. Pour finir la preuve il suffit de montrer que $\alpha^n = a$.

On va d'abord montrer que $\alpha^n \geq a$ puis montrer que $\alpha^n \leq a$.

Soit un réel positif β tel que $\beta^n < a$. Montrons que $\beta \neq \alpha$. On pose $\varepsilon = a - \beta^n$. Puisque la fonction p_n est continue il existe $\delta > 0$ tel que si un réel positif b vérifie $|b - \beta| < \delta$ alors $|b^n - \beta^n| < \varepsilon$. Par conséquent un tel b vérifie d'après l'inégalité triangulaire

$$\begin{array}{rcl}b^n & = & |b^n| \\ & \leq & |b^n - \beta^n| + |\beta^n| \\ & < & a - \beta^n + \beta^n \\ & < & a\end{array}$$

et il est donc dans R. C'est vrai en particulier pour $b = \beta + \frac{\varepsilon}{2}$ qui est strictement supérieur à β. Par conséquent β n'est pas un majorant de R. Ce n'est pas α. Ainsi $\alpha^n \geq a$.

Soit un réel positif β tel que $\beta^n > a$. Montrons que $\beta \neq \alpha$. On pose $\varepsilon = \beta^n - a$. Puisque la fonction p_n est continue il existe $\delta > 0$ tel que si un réel positif b vérifie $|b-\beta|<\delta$ alors $|b^n-\beta^n|<\varepsilon$. Par conséquent un tel b vérifie d'après l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} b^n &= |b^n| \\ &\geq |\beta^n| - |b^n-\beta^n| \\ &> \beta^n - (\beta^n - a) \\ &> a \end{aligned}$$

Puisque p_n est strictement croissante ceci implique que b est un majorant de R. C'est vrai en particulier pour $b=\beta$ et $b=\beta-\frac{\varepsilon}{2}$ qui est strictement inférieur à β. Par conséquent β n'est pas le plus petit des majorants de R : ce n'est pas α. Ainsi $\alpha^n \leq a$. Finalement $\alpha^n \geq a$ et $\alpha^n \leq a$ et donc $\alpha^n = a$. La racine n-ème de a existe bien.

proposition 4 *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction r_n qui à $x \in [0,+\infty)$ associe $r_n(x)=x^{\frac{1}{n}}$ est strictement croissante.*

preuve La fonction r_n est strictement croissante parce que r_n est la réciproque de la restriction à $[0,+\infty)$ de la fonction p_n et cette restriction est strictement croissante.

proposition 5 *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction r_n qui à $x \in [0,+\infty)$ associe $r_n(x)=x^{\frac{1}{n}}$ est continue sur $[0,+\infty)$ et dérivable sur $]0,+\infty)$ et si $x \in]0,+\infty)$ alors $r_n'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.*

Si $n=1$ le résultat est immédiat car le taux d'accroissement est 1. on s'intéresse maintenant au cas où $n \geq 2$.

preuve de la continuité On traite d'abord la continuité en 0. Fixons $\varepsilon>0$. On pose $\delta=\varepsilon^n$. Puisque r_n est strictement croissante, si $b \in [0,\delta[$ alors

$$|r_n(b)| = b^{\frac{1}{n}} < (\varepsilon^n)^{\frac{1}{n}} = \varepsilon.$$

Ceci prouve la continuité en 0.

Soit $a \in]0,+\infty)$. Montrons que r_n est continue en a. Fixons $\varepsilon>0$. On choisit δ comme le plus petit des deux nombres strictement positifs $\frac{a}{2}$ et $n\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}}\varepsilon$. Soit $b \in [0,+\infty)$ tel que que $|b-a|<\delta$. Alors $\frac{a}{2} \leq a,b$ et $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \leq a^{\frac{1}{n}}, b^{\frac{1}{n}}$ (croissance de r_n). D'après le lemme 2 on a donc pour tout

$k \in \{0, ..., n-1\}$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq |(a^{\frac{1}{n}})^k (b^{\frac{1}{n}})^{n-1-k}|.$$

Encore d'après le lemme 2 on a

$$n\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq |\sum_{k=0}^{n-1} (a^{\frac{1}{n}})^k (b^{\frac{1}{n}})^{n-k}|.$$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned}
n\left(\tfrac{a}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}} \varepsilon \geq \delta &> |a-b| \\
&> |(a^{\frac{1}{n}})^n - (b^{\frac{1}{n}})^n| \\
&> \left|(a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}})\left(\sum_{k=0}^{n-1} (a^{\frac{1}{n}})^k (b^{\frac{1}{n}})^{n-1-k}\right)\right| \text{ (lemme 3)} \\
&> |a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}| \cdot \left|\sum_{k=0}^{n-1} (a^{\frac{1}{n}})^k (b^{\frac{1}{n}})^{n-1-k}\right| \\
&> |a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}| \cdot n \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}}.
\end{aligned}$$

En divisant par $n\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ on obtient

$$\varepsilon > |a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}|.$$

Ceci prouve la continuité en a.

preuve de la dérivabilité et calcul de la dérivée Soit $a \in]0, +\infty)$. Montrons que r_n est dérivable en a et que $r_n'(a) = \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1}$.

Si $b > 0$ est différent de a alors

$$\frac{a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}}{a-b} = \frac{1}{\left(\sum_{k=0}^{n-1} (a^{\frac{1}{n}})^k (b^{\frac{1}{n}})^{n-1-k}\right)}$$

donc

$$\frac{a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}}{a-b} - \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{\left(\sum_{k=0}^{n-1} (a^{\frac{1}{n}})^k (b^{\frac{1}{n}})^{n-1-k}\right)} - \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1}$$

ou encore

$$\frac{r_n(a)-r_n(b)}{a-b}-\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1} \quad = \quad \frac{1}{\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a^{\frac{1}{n}})^k(b^{\frac{1}{n}})^{n-1-k}\right)}-\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}$$

Fixons $\varepsilon > 0$.

Puisque la fonction inverse est continue, il existe $\eta > 0$ tel que si

$$\left|na^{1-\frac{1}{n}}-x\right| < \eta \text{ alors } \left|\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}-\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$$

Soit k un entier dans $\{0,...,n-1\}$. Puisque r_{n-1-k} est continue il existe $\delta_k > 0$ tel que si $|b-a| < \delta_k$ alors $|(b^{\frac{1}{n}})^{n-1-k}-(a^{\frac{1}{n}})^{n-1-k}| < \frac{\eta}{n|a^{\frac{1}{n}}|^k}$. Soit δ le minimum de $\{\delta_0,...,\delta_{n-1}\}$. Alors on a pour tout b tel que $|b-a| < \delta$ et pour tout $k \in \{0,...,n-1\}$

$$\begin{array}{rcl}
|(a^{\frac{1}{n}})^k(b^{\frac{1}{n}})^{n-1-k}-a^{1-\frac{1}{n}}| & = & |(a^{\frac{1}{n}})^k(b^{\frac{1}{n}})^{n-1-k}-(a^{\frac{1}{n}})^{n-1}| \\
& = & |(a^{\frac{1}{n}})^k((b^{\frac{1}{n}})^{n-1-k}-(a^{\frac{1}{n}})^{n-1-k})| \\
& = & |(a^{\frac{1}{n}})^k|\cdot|(b^{\frac{1}{n}})^{n-1-k}-(a^{\frac{1}{n}})^{n-1-k}| \\
& < & |(a^{\frac{1}{n}})^k|\cdot\frac{\eta}{n|a^{\frac{1}{n}}|^k} \text{ (en raison du choix de } \delta) \\
& < & \frac{\eta}{n}.
\end{array}$$

Par conséquent d'après le lemme 2 on a

$$\left|\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a^{\frac{1}{n}})^k(b^{\frac{1}{n}})^{n-1-k}\right)-na^{1-\frac{1}{n}}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}((a^{\frac{1}{n}})^k(b^{\frac{1}{n}})^{n-1-k}-a^{1-\frac{1}{n}})\right| < n\frac{\eta}{n} = \eta.$$

Ainsi, vu le choix de η par rapport à δ il vient pour tout b tel que $|b-a| < \delta$

$$\left|\frac{r_n(a)-r_n(b)}{a-b}-\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}\right| < \varepsilon.$$

Ceci prouve que r_n est dérivable en a et que $r_n'(a) = \frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}$.