Première année du Master
Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation
mention second degré - parcours mathématiques
Université de Rennes 1

Quelques exercices sur les coniques, les nombres complexes en géométrie, les courbes et les surfaces

Jean-Marie Lion

Version du 18 mars 2015

Exercice 1.
On se place dans le plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$ et on considère la conique $\mathcal{C}$ de foyer $F=(0,0)$, de directrice $\delta=\{y=-1\}$ et d'excentricité $e>0$. Il s'agit de l'ensemble des points M de $\mathbf{R}^2$ tels que $FM=e\cdot d(M,\delta)$.
1. Donner une représentation en coordonnées polaires de $\mathcal{C}$.
2. Trouver une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
On suppose dans la suite que $e\neq 1$.
3. Montrer que $\mathcal{C}$ a un centre de symétrie C et deux axes de symétrie (l'un seulement contient F).
4. On note F' et δ' les symétriques de F et δ par rapport à l'axe de symétrie qui ne contient pas F. Montrer que la conique $\mathcal{C}$ admet F' et δ' comme foyer et directrice.
5. Montrer que $M\in\mathcal{C}\mapsto FM+F'M$ (respectivement $M\in\mathcal{C}\mapsto |FM-F'M|$) est constante si $e\in]0,1[$ (respectivement si $e>1$).

Exercice 2.
Réduire les équations suivantes et donner les éléments caractéristiques de la conique associée :
1. $x^2+2y^2+xy+x+y-1=0$,
2. $x^2+y^2+4xy+2x-1=0$,
3. $x^2+4y^2+4xy+x+y-1=0$.

Exercice 3.
Soit $\mathcal{E}$ une ellipse, F et F' ses foyers, Γ le cercle dont un diamètre est le grand axe de l'ellipse et $\mathcal{D}$ le cercle centré en F' et de rayon le double de celui de Γ.
1. Soit $M\in\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$ est la bissectrice de $((MF),(MF'))$ telle F et F' soit dans le même demi-plan bordé par $\mathcal{T}$. Montrer que si $M'\in\mathcal{T}\setminus\{M\}$ alors

$$FM'+F'M'>FM+F'M.$$

2. En déduire que $\mathcal{T}$ est la tangente en M à l'ellipse.
3. Montrer que si $M\in\mathcal{E}$ alors l'image de F par réflexion par rapport à la tangente en M à l'ellipse appartient à $\mathcal{D}$.
4. Montrer la réciproque.
5. Montrer que si $M\in\mathcal{E}$ alors l'image de F par la projection orthogonale sur la tangente en M à l'ellipse appartient à Γ.
6. Montrer la réciproque.

Exercice 4.
Soit $\mathcal{E}$ une ellipse, F et F' ses foyers, Γ le cercle dont un diamètre est le grand axe de l'ellipse et $\mathcal{D}$ le cercle centré en F' et de rayon le double de celui de Γ. Soit aussi δ une droite qui coupe l'ellipse en deux points M et M'.

1. Soit I l'intersection de $\mathcal{D}$ et de la demi-droite $[F',M)$ et soit J l'image de F par la reflexion par rapport à δ. Montrer que $IM = JM = FM$.
2. En déduire que M est le centre d'un cercle qui passe par F et J et qui est tangent à $\mathcal{D}$.

Exercice 5.
Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice δ. On note Δ l'axe de symétrie de cette parabole et S le sommet : $S = \Delta \cap \mathcal{P}$. Soit M un point de cette parabole, H son image par la projection orthogonale sur δ et $\mathcal{T}$ la bissectrice de $((MF),(MH)$ qui sépare F et H.
1. Soit $M' \in \mathcal{T} \setminus \{M\}$ et soit H' son image par la projection orthogonale sur δ. Montrer

$$\frac{FM'}{FH'} > \frac{FM}{FH} = 1.$$

2. En déduire que $\mathcal{T}$ est la tangente en M à la parbole.
3. Montrer que l'image de F par la réflexion par rapport à $\mathcal{T}$ appartient à δ.
4. Montrer que l'image de F par la projection orthogonale sur $\mathcal{T}$ appartient à la perpendiculaire au sommet S à l'axe de symétrie Δ.

Exercice 6.
Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole, F et F' ses foyers et M_0 un de ses point. On supose que $K = F'M_0' - FM_0 > 0$ et note $\mathcal{C}$ le cercle centré en F' et de rayon K.
1. Montrer que l'hyperbole $\mathcal{H}$ est le lieu des centres des cercles passant par F' et tangents à $\mathcal{C}$.
2. Soit $M \in \mathcal{H}$ et $\mathcal{T}$ est la bissectrice de $((MF),(MF'))$ telle que $\mathcal{T}$ sépare F et F'. Montrer que si $M' \in \mathcal{T} \setminus \{M\}$ alors

$$|FM' - F'M'| < |FM - F'M|.$$

3. En déduire que $\mathcal{T}$ est la tangente en M à l'hyperbole.

Exercice 7.
Soit C_a et C_b des cercles de rayons $b < a$ centrés en O, soit Δ et δ deux droites perpendiculaires en O et soit $\mathcal{E}$ l'ellipse tangente à C_a et C_b et dont le grand axe est Δ.
1. Montrer que si $M \in C_a$ et $N \in [O,M]$ sont alignés alors l'intersection de la parallèle à δ qui passe par M et de la parallèle à Δ qui passe par N est un point P de l'ellipse $\mathcal{E}$.
2. Soit Q tel que (N,P,M,Q) forme un parallélogramme. Montrer que (N,P,M,Q) est un rectangle.
3. sit I l'intersection des diagonales de (N,P,M,Q). Montrer que le cercle centré en I et qui passe par O coupent les axes de l'ellipse $\mathcal{E}$ en deux points J et K tels que $I \in (JK)$.
4. Soit M', N', P' et Q' les images de M, N, P et Q par une rotation d'un quart de tour. Montrer que Q' est sur l'ellipse.

Exercice 8.
Soit $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct d'un espace affine euclidien et orienté $\mathcal{E}$. On considère le cône C donné par $C = \{P(x,y,z) = 0\}$ avec $P(x,y,z) = z^2 - (x^2+y^2)$.
1. Soit δ une droite affine : $\delta = \{(\alpha,\beta,\gamma) + t(u,v,w), t \in \mathbf{R}\}$. En étudiant $t \mapsto P(\alpha+tu,\beta+tv,\gamma+tw)$ montrer que si $O \notin \delta$ alors $\delta \cap C$ contient au plus deux points.
2. Vérifier que si une isométrie fixe globalement C elle fixe O.
3. Soient $M_0 = (1,0,1)$, $M_1 = (-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$ et $M_2 = (-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$. Quelles sont les images possibles du triplet (M_1,M_2,M_3) par une isométrie qui fixe globalement C ?
4. Donner le groupe G des isométries qui fixent globalement C.
5. On note $\mathbf{C}_1$ le cône plein $\mathbf{C}_1 = \{x^2+y^2 \leq z^2, z \in [0,1]\}$. Quel est le volume de ce cône plein ?
6. Quelle est la frontière $\partial\mathbf{C}_1$ de $\mathbf{C}_1$?
7. Quelle est l'aire de $\partial\mathbf{C}_1$?
8. Montrer qu'une isométrie qui fixe globalement $\mathbf{C}_1$ fixe globalement $\partial\mathbf{C}_1$.
9. Soit A,B,C trois points de $\mathcal{E}$ tels que $AB < AC$. Montrer que si $X \in]B,C[$ alors $AX < AC$.
Soient $N_0 = (1,0,1)$, $N_1 = (0,1,1)$, $N_2 = (-1,0,1)$ et $N_3 = (-1,-1,1)$.

10. Montrer que si $N \in \mathbf{C}_1 \setminus \{N_2\}$ alors $N_0N < N_0N_2$.
11. Montrer que si $N, N' \in \mathbf{C}_1$ vérifient $NN' = N_0N_1$ alors $N, N' \in \{z = 1\}$ et N' est l'image de N par la symétrie orthogonale par rapport à la droite $O + \mathbf{R}\overrightarrow{k}$.
12. Quelles sont les images possibles du quadruplet (N_0, N_1, N_2, N_3) par une isométrie qui fixe globalement $\mathbf{C}_1$?
13. Donner le groupe G des isométries qui fixent globalement $\mathbf{C}_1$.

Exercice 9.
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct d'un espace affine euclidien et orienté $\mathcal{E}$. On considère l'hyperboloïde à une nappe $\mathcal{H}$ donné par $\mathcal{H} = \{P(x,y,z) = 0\}$ avec $P(x,y,z) = 1 + z^2 - (x^2 + y^2)$.
1. Quelle est l'intersection de $\mathcal{H}$ avec un plan horizontal ?
2. Soit $\lambda \geq 0$. Quelle est l'intersection de $\mathcal{H}$ avec un plan $\{y = \lambda$?
3. Donner l'équation du plan tangent à $\mathcal{H}$ en $(0,1,0)$.
4. Montrer que $\mathcal{H}$ contient la droite $\delta = \{(t,1,t) : t \in \mathbf{R}\}$.
5. Montrer qu'il y exactement deux droites contenues dans $\mathcal{H}$ et qui passent par $(0,1,0)$.
6. Montrer que $\mathcal{H}$ ne contient pas de droite horizontale.
7. Montrer que $\mathcal{H}$ est globalement invariant sous l'action des rotations d'axe $O + \mathbf{R}\overrightarrow{k}$, des réflexions par rapport aux plans qui contiennent cet axe et de la réflexion par rapport au plan $\{z = 0\}$.
8. Décrire toutes les droites contenues dans $\mathcal{H}$.
9. Décrire toutes les isométries qui laissent $\mathcal{H}$ globalement invariant.

Exercice 10.
Construire à la règle et au compas dans le plan affine euclidien
- la médiatrice d'un bipoint,
- le centre d'un cercle dont trois points sont donnés,
- l'image d'un point donné par une réflexion par rapport à une droite donnée,
- l'image d'un point donné par une projection orthogonale sur une droite donnée,
- la perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné,
- la parallèle à une droite donnée et passant par un point donné,
- le milieu d'un bipoint,
- les bissectrices de deux droites données,
- l'image d'un point par une translation dont on connaît l'action sur un autre point,
- l'image d'un point par une homothétie dont on connaît le centre et l'action sur un point différent du centre,
- l'image d'un point par une rotation dont on connaît l'action sur deux points différents,
- l'image d'un point par une similitude dont on connaît l'action sur deux points différents,
- l'image d'un point par une application dont on connaît l'action sur un repère affine,
- des subdivisions égales d'un segment donné,
- la tangente à un cercle en un point donné de ce cercle,
- les tangentes à un cercle qui passent par un point donné,
- les tangentes à deux cercles,
- un point d'une cônique étant donnés certains éléments caractéristiques de cette conique,
- la tangente à une ellipse en un point donné, supposés connus les deux foyers,
- la tangente à une hyperbole en un point donné, supposés connus les deux foyers,
- la tangente à une parabole en un point donné, supposer connus le foyer et la directrice.

Exercice 11.
On identifie $\mathbf{C}$ à un plan affine euclidien orienté.
1. Quelles sont les racines complexes (module et argument) du polynôme $P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.
2. Montrer que $P(z)$ se factorise en

$$P(z) = (z^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})z + 1)(z^2 - 2\cos(\frac{4\pi}{5})z + 1).$$

3. Trouver une équation du second degré vérifiée par $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
4. En déduire une construction à la règle et au compas du pentagone régulier.

Exercice 12.
On pose $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.
1. Montrer que les homographies $z \mapsto h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec a, b, c et d dans $\mathbf{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$, forment un groupe pour la composition (avec comme convention $h(\infty) = \frac{a}{c}$ et $h(-\frac{d}{c}) = \infty$ si $c \neq 0$, $h(\infty) = \infty$ si $c = 0$ et $h(\infty) = 0$ si $a = 0$).
2. Vérifier que si $A, B, C \in \overline{\mathbf{C}}$ sont distincts il existe une et une seule homographie h_{ABC} telle que $h_{ABC}(A) = \infty$, $h_{ABC}(B) = 0$ et $h_{ABC}(C) = 1$ et cette homographie est caractérisée par $h_{ABC}(D) = \frac{A-C}{A-D} \cdot \frac{B-D}{B-C}$ si A, B, C et D sont des complexes distincts.
3. Montrer que si g est une homographie qui envoie A, B et C sur A', B' et C' alors $h_{A'B'C'}(D') = h_{ABC}(D)$.

Exercice 13.
Si $a, \lambda \in \mathbf{C}$ avec $|a| < 1$ et $|\lambda| = 1$ alors ont pose $h_{a\lambda}(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.
1. Montrer que si $z = R\exp(i\theta)$ et $a = r\exp(i\alpha)$ alors

$$|h_{a\lambda}(z)|^2 = \left| \frac{R - r\exp(i(\alpha-\theta))}{1 - Rr\exp(i(\alpha-\theta))} \right|^2 = \frac{R^2 - 2Rr\cos(\alpha-\theta) + r^2}{1 - 2Rr\cos(\alpha-\theta) + R^2r^2}.$$

2. Montrer que si $0 \leq u, v < 1$ alors $u + v < 1 + uv$.
3. En déduire que si $|z| < 1$ alors $|h_{a\lambda}(z)| < 1$.
4. Montrer que les $h_{a,\lambda}, |a| < 1, |\lambda| = 1$, forment un groupe de bijections de $D = \{|z| < 1\}$ dans lui-même.
5. Caractériser les $h_{a,\lambda}$ qui fixent 0.

Exercice 14.
Critères de cocyclicité.
Soit A, B, C et D quatre points distincts d'un plan affine euclidien d'affixes a, b, c et d. Ils sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\frac{c-a}{d-a}\frac{d-b}{c-b} \in \mathbf{R}.$$

Soit A, B, C et D quatre points distincts d'un plan affine euclidien. Ils sont cocycliques ou alignés si et seulement si les angles de droites $(\widehat{(CA),(CB)})$ et $(\widehat{(DA),(DB)})$ sont égaux.
Soit A, B, C et D quatre points distincts d'un plan affine euclien. On suppose que les droites AC et BD se coupent en un cinquième point M. Alors A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}.$$

Soit A, B, C, D quatre points distincts d'un plan affine euclidien. Montrer que ce sont quatre points successifs d'un cercle ou d'une droite si et seulement si

$$||\overrightarrow{AC}|| \cdot ||\overrightarrow{BD}|| = ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{CD}|| + ||\overrightarrow{BC}|| \cdot ||\overrightarrow{AD}||.$$

Exercice 15.
On appelle grand cercle de la sphère unité $\mathbf{S}$ l'intersection de cette sphère avec un plan passant par l'origine (un plan vectoriel). On appelle hémisphère de la sphère unité l'intersection de la sphère $\mathbf{S}$ avec un demi-espace bordé par un plan passant par l'origine. Soit $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ et $\mathbf{P}_3$ trois plans vectoriels dont l'intersection est réduite à 0 et $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ et $\mathbf{H}_3$ des demi-espaces bordés par $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ et $\mathbf{P}_3$. Si $i \in \{1,2,3\}$ on pose $C_i = \mathbf{P}_i \cap \mathbf{S}$ et $H_i = \mathbf{H}_i \cap \mathbf{S}$. Si $i \neq j \in \{1,2,3\}$ pose $S_{ij} = H_i \cap H_j$, on note u_{ij} le vecteur unitaire normal à $\mathbf{P}_i$ et inclus dans $\mathbf{H}_j$ et on note $\theta_{ij} \in]0, \pi[$ l'angle (géométrique) entre les vecteur u_i et u_j : $\cos(\theta_{ij}) =< u_i, u_j >$. Enfin on pose $\mathcal{T}_{123} = H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

1. Montrer qu'un grand cercle est bien un cercle.
2. Montrer que l'aire de la sphère $\mathbf{S}$ est 4π.
3. Montrer que l'aire de S_{ij} est $2\theta_{ij}$.
4. Observer que $\mathcal{T}_{123} = S_{12} \cap S_{23} = S_{23} \cap S_{31} = S_{31} \cap S_{12}$ et que

$$H_1 \setminus (S_{12} \cup S_{31}) \cup (C_1 \cup C_2 \cup C_3) = J(S_{23} \setminus H_1) \cup (C_1 \cup C_2 \cup C_3)$$

où $J(X) = -X$ si $X \in \mathbf{R}^3$.
5. En déduire la formule d'aire suivante :

$$2\mathrm{A}ire(\mathcal{T}_{123}) + \mathrm{A}ire(H_1) = \mathrm{A}ire(S_{12}) + \mathrm{A}ire(S_{23}) + \mathrm{A}ire(S_{31}).$$

6. Exprimer l'aire de $\mathcal{T}_{123}$ en fonction de $\pi, \theta_{12}, \theta_{23}$ et θ_{31}.

Exercice 16.
1. Soient $p, q \in \mathbf{N}$. Tracer la courbe $C = \{(\cos(pt), \sin(qt)) : t \in \mathbf{R}\}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbf{Q}$. Tracer la courbe $C = \{(\cos(t), \sin(\lambda t)) : t \in \mathbf{R}\}$.
3. Soit $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Tracer la courbe $C_{2\pi} = \{(\cos(t), \sin(\lambda t)) : t \in [0, 2\pi]\}$. Que dire de la courbe $C = \{(\cos(t), \sin(\lambda t)) : t \in \mathbf{R}\}$?

Exercice 17.
1. Soient $p, q \in \mathbf{N}^2$ et $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^p - y^q = 0\}$. Donner une représentation paramétrique de la courbe C puis la tracer.
2. Tracer la courbe $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2(x+1) - y^2 = 0\}$.

Exercice 18.
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^2. On suppose que $f''(0) > 0$.
1. Calculer le rayon de courbure en $(0, f(0))$ de la courbe représentative de f.
2. Soit $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $F(x, t) = (x - f'(x)t, f(x) + t)$.
3. Montrer qu'il existe un unique t_0 tel que $DF(0, t_0)$ ne soit pas de rang 2.
4. Montrer que $F(0, t_0)$ est le centre du cercle de courbure (ou cercle de osculteur) tangent à la courbe représentative de f en $(0, f(0))$.

Exercice 19.
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct d'un espace affine euclidien et orienté $\mathcal{E}$. On considère un polynôme P de degré 2 et l'hélice Γ paramétrée dans ce repère par

$$\Gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t).$$

1. En écrivant P sous la forme $P(x, y, z) = az^2 + b(x, y)z + c(x, y)$ avec $a \in \mathbf{R}$, b une forme affine et c un polynôme de degré 2, montrer que si $\Gamma \subset \{P = 0\}$ alors $a = 0$ et $b = 0$.
2. En déduire que $\Gamma \subset \{P = 0\}$ si et seulement s'il existe $\lambda \neq 0$ tel que

$$P(x, y, z) = \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

3. Quelle est la tangente, la courbure et la torsion de Γ en un point $\Gamma(t)$?
4. Quelle est la longueur de l'arc de courbe $\Gamma([0, 2\pi])$?
5. Calculer $\Gamma(0)\Gamma(t)^2$.
6. Trouver les triplets (u, v, w) tels que

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(0)\Gamma(1) & = & \Gamma(u)\Gamma(v) \\ \Gamma(1)\Gamma(2) & = & \Gamma(v)\Gamma(w) \\ \Gamma(2)\Gamma(0) & = & \Gamma(w)\Gamma(u) \end{array}$$

7. Donner le groupe G des isométries qui fixent globalement Γ.

Exercice 20.
(Courbes de Bézier, algorithme de Casteljau et polynômes de Bernstein d'après Perrin)
1. Soient A_0,A_1,A_2 trois points non alignés du plan. Calculer les points $P(t)$ pour $t=0$ ou $t=1$ et étudier les tangentes en $t=0$ et $t=1$ de la courbe paramétrée

$$t\in[0,1]\mapsto P(t)=A_0(1-t)^2+2A_1t(1-t)+A_2t^2.$$

2. Soit $A=(A_0,A_1,A_2,A_3)$ un quadruplets de points non trois à trois alignés du plan. Calculer les points $P_A(t)$ pour $t=0$ ou $t=1$ et étudier les tangentes ainsi que la dérivée seconde en $t=0$ et $t=1$ de la courbe paramétrée

$$t\in[0,1]\mapsto P_A(t)=A_0(1-t)^3+3A_1t(1-t)^2+A_2t^2(1-t)+A_3t^3.$$

3. Soient $A_0=B_0=C_0=(0,0)$, $A_1=B_1=C_2=(1,0)$, $A_2=B_3=C_1=(1,1)$, $A_3=B_2=C_3=(0,1)$. Tracer les arcs de courbe correspondant à P_A, P_B et P_C pour $t\in[0,1]$.
4. Soit I le milieu de $[A_1,A_2]$. On considère les quadruplets $B=(B_0,B_1,B_2,B_3)$ et $C=(C_0,C_1,C_2,C_3)$ définis de la façon suivante :
- $B_0=A_0$, B_1 est le milieu de $[A_0,A_1]$, B_2 est le milieu de $[B_1,I]$;
- $C_3=A_3$, C_2 est le milieu de $[A_2,A_3]$, C_1 est le milieu de $[I,C_2]$;
- $B_3=C_0$ est le milieu de $[B_2,C_1]$.

Montrer que $P_A(t)=P_B(2t)=P_C(2(t-\frac{1}{2}))$ si $t\in\mathbf{R}$.
5. Soit $(A_0,\ldots,A_n,A_{n+1})$ un $n+2$-uplet de points du plan. On considère les polynômes P, Q et R définis pour $t\in\mathbf{R}$ par

$$\begin{aligned}
P(t) &= \sum_{i=0}^{n+1}A_i\frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}t^i(1-t)^{n+1-i},\\
Q(t) &= \sum_{i=0}^{n}A_i\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i},\\
R(t) &= \sum_{i=0}^{n}A_{i+1}\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}.
\end{aligned}$$

Montrer que $P(t)=(1-t)Q(t)+tR(t)$.

Exercice 21.
(Cercle de Mohr) Soit Γ le cercle unité $\Gamma=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2=1\}$, soient $\alpha<\beta$ des réels positifs et soit L l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$ qui à $M=(x,y)$ associe $L(M)=(\alpha x,\beta y)$.
1. Vérifier que $||L(M)||^2=\alpha^2x^2+\beta^2y^2$.
2. Montrer que si $M\in\Gamma$ il existe un unique réel $f(M)$ tel que $L(M)-f(M)\cdot M$ soit orthogonal à M.
3. Montrer que si $M\in\Gamma$ alors $f(M)=\alpha x^2+\beta y^2$.
4. Vérifier que si $M\in\Gamma$ alors $0\le f(M)\le ||L(M)||$ et en déduire que la fonction qui à $M\in\Gamma$ associe $g(M)=\sqrt{||L(M)||^2-f(M)^2}$ est bien définie.
5. Montrer que $g(M)^2=\alpha^2x^2+\beta^2y^2-(\alpha x^2+\beta y^2)^2$.
6. Soit ϕ la fonction de Γ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $\phi=(f,g)$. On note Π^+ le demi-plan $\{(t,s)\in\mathbf{R}^2 : s\ge 0\}$. On pose $A=(\alpha,0)$ et $B=(\beta,0)$. Montrer que lorsque M parcourt Γ alors $\phi(M)$ parcourt le demi-cercle de diamètre $[A,B]$ inclus dans Π^+.

Exercice 22.
(le volume de la sphère par Archimède) Soient $R>0$, la boule $B=\{x^2+y^2+z^2\le R^2\}$, le cône $C=\{x^2+y^2\le z^2\le R^2\}$ et le cylindre $P=\{x^2+y^2\le R^2,\ z^2\le R^2\}$. En admettant que deux solides ont même volume si, chaque fois qu'on les coupe par un plan horizontale on obtient deux sections de même aire, montrer que le volume du cylindre P est égal à la somme des volumes de la boule B et du cône C.