Question 2

Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ qui s'intersectent en deux points distincts A et B.

1. Montrer qu'il existe une similitude directe τ de centre A qui envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$.

2. Soit $M \in \mathcal{C}$. Montrer que M, B et $\tau(M)$ sont alignés.

Première réponse

1. On note O et O' les centres des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Les rayons des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont OA et $O'A$. Soit τ la similitude directe obtenue en composant l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{O'A}{OA}$ avec la rotation de centre A et d'angle $(\widehat{(AO),(AO')})$. On a $\tau(O) = O'$ et si $M \in \mathcal{C}$ alors $OM = OA$ et donc $O'\tau(M) = \tau(O)\tau(M) = \frac{O'A}{OA}OM = O'A$. Ainsi $\tau(M) \in \mathcal{C}'$ et $\tau(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$. La réciproque τ^{-1} de τ est la composée de l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{OA}{O'A}$ avec la rotation de centre A et d'angle $(\widehat{(AO'),(AO)})$. On montre de même que $\tau^{-1}(\mathcal{C}') \subset \mathcal{C}$. Ceci achève la preuve de $\mathcal{C}' = \tau(\mathcal{C})$.

2. La question n'a d'intérêt que si M et $\tau(M)$ sont différents de A qui est l'unique point fixe de τ et de B. Puisque τ est une similitude elle conserve les angles orientés de droites. Par conséquent

$$(\widehat{(BA),(BM)}) = (\widehat{(\tau(B)\tau(A)),(\tau(B)\tau(M))}).$$

Or $\tau(A) = A$. Ainsi

$$(\widehat{(BA),(BM)}) = (\widehat{(\tau(B)A),(\tau(B)\tau(M))}).$$

De plus A, B, $\tau(B)$ et $\tau(M)$ appartiennent à $\mathcal{C}'$. D'après le critère de cocyclicité on a

$$(\widehat{(\tau(B)A),(\tau(B)\tau(M))}) = (\widehat{(BA),(B\tau(M))}).$$

On en déduit que

$$(\widehat{(BA),(BM)}) = (\widehat{(BA),(B\tau(M))}).$$

Les droites (BM) et $(B\tau(M))$ font le même angle avec la droite (BA) et elles ont un point en commun. Elles sont donc confondues et M, B et $\tau(M)$ sont alignés.

Seconde réponse

1. Quitte à faire une homothétie on peut supposer que les centres O et O' des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ vérifient $OO' = 1$. On choisit une base orthonormée directe

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ telle que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OO'}$. Les points A et B sont échangés par la réflexion d'axe $O + \mathbf{R}\overrightarrow{u}$. On identifie la plan affine euclidien avec $\mathbf{C}$: l'affixe de O est 0 et celle de O' est 1. L'affixe de A est $a = r\exp(it)$ et celle de B est $b = r\exp(-it)$ où r désigne le rayon de $\mathcal{C}$. L'application τ qui au point M d'affixe $z \in \mathbf{C}$ associe le point M' d'affixe $z' = r\exp(it) - \frac{1-r\exp(it)}{r\exp(it)}(z - r\exp(it))$ est la similitude directe qui fixe A et qui envoie O sur O'. Ainsi puisque l'image d'un cercle par une similitude est un cercle dont le centre est l'image du centre du cercle de départ, l'image de $\mathcal{C}$ par τ est le cercle qui passe par $\tau(A) = A$ et de centre $\tau(O) = O'$: c'est le cercle $\mathcal{C}'$.

2. Soit $M \in \mathcal{C}$ et z son affixe. Il existe $s \in \mathbf{R}$ tel que $z = r\exp(is)$. Calculons $\frac{z'-b}{z-b}$ où z' est l'affixe de $\tau(M)$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{z'-b}{z-b} &= \frac{r\exp(it) - \frac{1-r\exp(it)}{r\exp(it)}(r\exp(is) - r\exp(it)) - r\exp(-it)}{r\exp(is) - r\exp(-it)} \\
&= 1 - r\exp(-it)\frac{\exp(is) - \exp(it)}{\exp(is) - \exp(-it)} \\
&= 1 - r\frac{\exp(i\frac{1}{2}(s-t)) - \exp(-i\frac{1}{2}(s-t))}{\exp(i\frac{1}{2}(s+t)) - \exp(-i\frac{1}{2}(s+t))} \\
&= 1 - r\frac{\sin(\frac{1}{2}(s-t))}{\sin(\frac{1}{2}(s+t))} \in \mathbf{R}
\end{aligned}$$

Or l'argument de $\dfrac{z'-b}{z-b}$ est une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B\tau M}})$. Ainsi, puisque $\dfrac{z'-b}{z-b} \in \mathbf{R}$ les points M, B et $\tau(M)$ d'affixes respectives z, b et z' sont alignés.