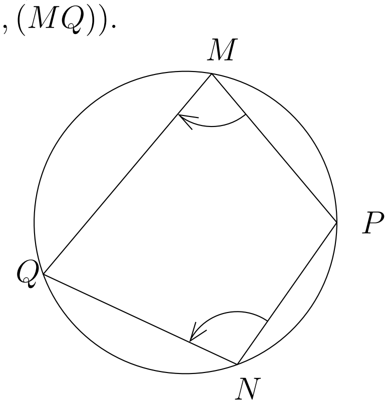
Question 1 Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ qui s'intersectent en deux points distincts A et A'. On considère deux droites distinctes δ et δ' qui passent respectivement par A et A'. On suppose que $(\mathcal{C}_1 \cap \delta) \setminus \{A\} = \{A_1\}$, $(\mathcal{C}_2 \cap \delta) \setminus \{A\} = \{A_2\}$, $(\mathcal{C}_1 \cap \delta') \setminus \{A'\} = \{A'_1\}$, $(\mathcal{C}_2 \cap \delta') \setminus \{A'\} = \{A'_2\}$ et que $A_1 \neq A'_1$ et $A_2 \neq A'_2$. Montrer que les droites $(A_1A'_1)$ et $(A_2A'_{2)})$ sont parallèles.

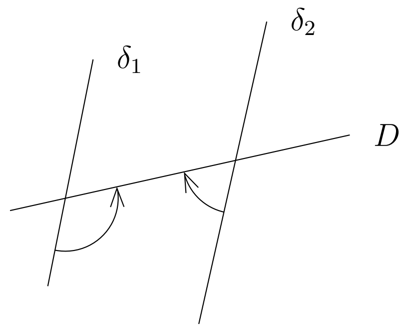
On répond à la question en utilisant les deux propriété suivantes.

propriété 1 Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et soit P, Q et M trois points distincts de $\mathcal{C}$. Alors l'angle orienté de droites $(\widehat{(MP),(MQ)})$ caractérise le cercle $\mathcal{C}$: si $N \in \mathcal{P} \setminus \{P, Q\}$ alors $N \in \mathcal{C}$ si et seulement si $(\widehat{(NP),(NQ)}) = (\widehat{(MP),(MQ)})$.



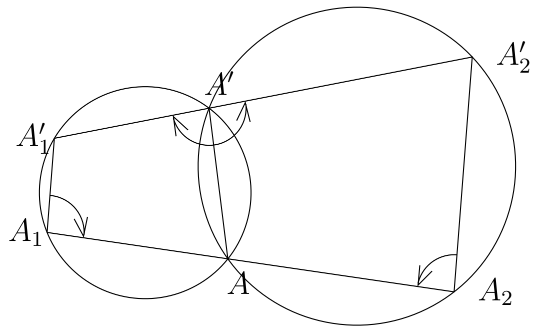
Les angles orientés de droites $(\widehat{(MP),(MQ)})$ et $(\widehat{(NP),(NQ)})$ sont égaux

propriété 2 Soit δ_1, δ_2 et D trois droites d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$. On suppose que D et δ_1 sont concourantes ainsi que D et δ_2. Les droites δ_1 et δ_2 sont parallèles si et seulement si les angles orientés de droites $(\widehat{D,\delta_1})$ et $(\widehat{D,\delta_2})$ sont égaux.



δ_1 et δ_2 sont parallèles et coupent D suivant le même angle orienté de droites

Réponse détaillée



La cocyclicité entraîne l'égalité d'angles orientés de droites

Puisque A_1, A et A_2 sont alignés on a $(A_1A_2) = (A_1A)$ et

$$((A_1A_1'\widehat{),(}A_1A_2)) = ((A_1A_1'\widehat{),(}A_1A)).$$

D'après la propriété 1 appliquée à $\mathcal{C}_2$ on a donc

$$((A_1A_1'\widehat{),(}A_1A_2)) = ((A_1A_1'\widehat{),(}A_1A)) = ((A'A_1'\widehat{),(}A'A)).$$

Puisque A_1', A' et A_2' sont alignés on a $(A'A_1') = (A'A_2')$ et

$$((A_1A_1'\widehat{),(}A_1A_2)) = ((A'A_1'\widehat{),(}A'A)) = ((A'A_2'\widehat{),(}A'A)).$$

D'après la propriété 1 appliquée à $\mathcal{C}_2$ on a donc

$$((A_1A_1'\widehat{),(}A_1A_2)) = ((A'A_2'\widehat{),(}A'A)) = ((A_2A_2'\widehat{),(}A_2A)).$$

Puisque A_1, A et A_2 sont alignés on a $(A_2A) = (A_1A_2)$ et

$$((A_1A_1'\widehat{),(}A_1A_2)) = ((A_2A_2'\widehat{),(}A_2A)) = ((A_2A_2'\widehat{),(}A_1A_2)).$$

Ainsi

$$((A_1A_1'\widehat{),(}A_1A_2)) = ((A_2A_2'\widehat{),(}A_1A_2)).$$

D'après la propriété 2 ceci implique que les droites (A_1A_1') et (A_2A_2') sont parallèles.