

Nom :
Prénom :

Université de Rennes 1
M1 MEFF Maths (2016-2017)
Algèbre, Géométrie, Algorithmique II
Contrôle continu 3 (30 minutes)

On composera exclusivement sur cette feuille. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Les documents sont interdits ainsi que les appareils électroniques.

Exercice 1. (6 pts) Donner deux démonstrations différentes de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Exercice 2. (8 pts) 1/ Soit $a, b \in \mathbf{N}$, non nuls. Soit $c = \min\{ua + vb \in \mathbf{N}^*, u, v \in \mathbf{Z}\}$.

- a) Montrer que c est le plus grand diviseur commun à a et b (Bezout).

- b) Montrer que si r est le reste de la division euclidienne de a par b alors c divise r .

2/ Trouver $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que $314u + 271v = 1$.

3/ Montrer que si $a, b, c \in \mathbf{Z}$ avec a divise bc et a premier avec b alors a divise c (Gauss).

Exercice 3. (6 pts) 1/ Montrer que si $p \in \mathbf{N}$ premier et $a \in \mathbf{Z}$ alors $a^p \equiv_p a$ (Fermat).

2/ Montrer que si $a, b \in \mathbf{N}$ sont premiers entre eux et si ϕ est le nombre d'entiers naturels premiers à b et inférieurs à b alors $a^{\phi(b)} \equiv_b 1$.