NOM : Université de Rennes 1
Prénom : M1 MEFF Maths (2015-2016)
Nbre de feuilles rendues : Algèbre, Géométrie, Algorithmique II
Contôle continu 4 (90 minutes + 30 minutes si tiers-temps)

On rédige sur cette feuille et on poursuit sur des feuilles supplémentaires. On numérote toutes les feuilles et on indique son nom sur chacune d'elles. Les documents et les appareils électroniques sont interdits. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.

Exercice 1.
(2 pts) Soit $a, b \in \mathbf{N}^2$ tels que $b > 0$. Montrer qu'il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbf{N}^2$ tel que $a = bq + r$ et $r < b$ (division euclidienne dans les entiers naturels).

Exercice 2.
(2 pts) Soit $J \subset \mathbf{N}^*$ non vide tel que si $(a, b) \in J^2$ on a $a + b \in J$ et, si et $a > b$, on a $a - b \in J$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{N}^*$ tel que $J = c\mathbf{N}^*$.

Exercice 3.
(2 pts) Soit E ensemble non vide et $e \in E$. On suppose qu'il existe une bijection $f : E \to E \setminus \{e\}$. Construire à l'aide de f une injection de $\mathbf{N}$ dans E.

Exercice 4.
(2 pts) Soit $a, b \in \mathbf{Z}$. Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que $ua + vb = pgcd(a, b)$.

Exercice 5.
(2 pts) Soit $a, b, c \in \mathbf{Z}$. On suppose que $pgcd(a, b) = 1$ et que a divise bc. Montrer que a divise c.

Exercice 6.
(2 pts) Soit $a, b, m, n \in \mathbf{Z}$. On suppose $pgcd(m, n) = 1$. Résoudre dans $\mathbf{Z}$ le système $x \equiv_m a$ et $x \equiv_n b$.

Exercice 7.
(2 pts) Soit $n, p, q \in \mathbf{N}^*$ avec p premier. Montrer qu'il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que $pgcd(n, p^q) = p^r$.

Exercice 8.
(2 pts) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $m \in \mathbf{Z}$. Montrer que $\overline{m}$ est un générateur de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si et seulement si $pgcd(m, n) = 1$.

Exercice 9.
(2 pts) Soit $n, m \in \mathbf{N}^*$. Montrer que si $n^{\frac{1}{m}} \in \mathbf{Q}$ alors $n^{\frac{1}{m}} \in \mathbf{N}$.

Exercice 10.
(2 pts) Soit $0 < r < R$ réels et $m, n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que les mouvements d'une planète P et d'un satellite S s'expriment dans un repère orthonormé bi-dimensionnel d'origine le soleil O par :
- $x_P(t) = R\cos(t/m)$ et $y_P(t) = R\sin(t/m)$ pour la planète ;
- $x_S(t) = R\cos(t/m) + r\cos(t/n)$ et $y_S(t) = R\sin(t/m) + r\sin(t/n)$ pour le satellite.

Donner les $t \in \mathbf{R}$ tels que $S \in [O, P]$ ainsi que les positions de P associées et leur nombre.