

Nom :
Prénom :

Université de Rennes 1
M1 MEFF Maths (2015-2016)
Algèbre, Géométrie, Algorithmique II
Contrôle continu 3 (30 minutes)

On composera exclusivement sur cette feuille. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Les documents sont interdits ainsi que les appareils électroniques.

Exercice 1.

(12 pts) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note $\phi(n)$ le nombre de générateurs de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

1. Soit $m \in \mathbf{Z}$. Montrer que sa classe \overline{m} est un générateur de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si et seulement si $\text{pgcd}(m, n) = 1$.
2. On suppose maintenant que $n = p^q$ où p premier et $q \in \mathbf{N}^*$.
 - 2.a. Soit $m \in \mathbf{Z}$. Montrer que $\text{pgcd}(m, n) > 1$ si et seulement si p divise m .
 - 2.b. Montrer que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ a exactement $n(1 - 1/p)$ générateurs.
3. On admet que si $a, b \in \mathbf{N}$ sont tels que $\text{pgcd}(a, b) = 1$ alors $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. Montrer que si $c = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}$ avec les p_i premiers tous différents et les r_i entiers naturels non nuls alors

$$\phi(c) = c(1 - 1/p_1) \cdot \dots \cdot (1 - 1/p_k).$$

Exercice 2.

(8 pts) Soit un vélo muni d'une roue arrière avec un pignon fixe de n dents et d'un pédalier associé à un plateau de m dents. La roue arrière est équipée d'un pneu et d'une chambre à air.

1. Discuter, en fonction de m et de n , des positions possibles de la valve de la roue arrière lorsque les manivelles sont à l'horizontale (les manivelles relient les pédales au plateau et à l'axe de pédalier).
2. Le vélo n'a pas de frein et la seule façon de freiner est de bloquer les manivelles à l'horizontale. Pourquoi, si on veut préserver le pneu, l'idéal est que m et n soient premiers entre eux ?