Nom :
Prénom :

Université de Rennes 1
M1 MEFF Maths (2015-2016)
Algèbre, Géométrie, Algorithmique II
Contôle continu 1 (30 minutes)

On composera exclusivement sur cette feuille. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Les documents sont interdits ainsi que les appareils électroniques.

Exercice 1.
(8 pts) Soit $a, b \in \mathbf{N}^2$ tels que $b > 0$. Montrer qu'il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbf{N}^2$ tel que $a = bq + r$ et $r < b$ (division euclidienne dans les entiers naturels).

Exercice 2.
(8 pts) Soit $J \subset \mathbf{N}^*$ non vide tel que si $(a, b) \in J^2$ on a $a + b \in J$ et, si et $a > b$, on a $a - b \in J$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{N}^*$ tel que $J = c\mathbf{N}^*$.

Exercice 3.
(4 pts) Soit E ensemble non vide et $e \in E$. On suppose qu'il existe une bijection $f : E \to E \setminus \{e\}$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par récurrence par : $x_0 = e$ et si $n \in \mathbf{N}$ alors $x_{n+1} = f(x_n)$.
1. Soit $p \in \mathbf{N}$. Montrer que s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $x_n = x_{n+p}$ alors $x_0 = x_p$. En déduire que $p = 0$.
2. Donner une injection de $\mathbf{N}$ dans E.