Nom :
Prénom :

Université de Rennes 1
M1 MEFF Maths (2014-2015)
Algèbre, Géométrie, Algorithmique II
Contôle continu 8 (120 minutes)

On compose sans document ni appareil électronique.

Exercice 1. Montrer que $4\arctan(1)$ est compris entre 3.13 et 3.15. On pourra utiliser les résultats suivants

k	1	2	3	4	5
$\frac{16}{k}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^k$ à 10^3 près	3.2	0.32	0.043	0.006	0.001
$\frac{4}{k}\cdot\left(\frac{1}{239}\right)^k$ à 10^3 près	0.017	0	0	0	0

Exercice 2. Soit $(d_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$.
1. Montrer que la suite $t_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{d_n}{2^n}$ est croissante et convergente vers un réel $t \in [0,2]$.
2. On suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tels que pour tout $n \geq p$ on a $d_{n+q} = d_n$. Montrer que $t \in \mathbf{Q}$.
3. Montrer la réciproque.

Exercice 3. Montrer l'existence de la division euclidienne dans $\mathbf{N}$ c'est à dire montrer que si $a,b \in \mathbf{N}$ avec $b \neq 0$ alors il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbf{N}^2$ tel que $a = bq + r$ et $r < b$.

Exercice 4. Soit $a,b \in \mathbf{Z}$. Donner en justifiant un algorithme pour trouver $pgcd(a,b)$ et $u,v \in \mathbf{Z}$ tels que $ua + vb = pgcd(a,b)$.

Exercice 5. Montrer que si $r \in \mathbf{Q}^+$ et $d \in \mathbf{N}^*$ sont tels que $r^d \in \mathbf{N}$ alors $r \in \mathbf{N}$.

Exercice 6. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 7. On rappelle que $a = \cos(2\frac{\pi}{5}) + i\sin(2\frac{\pi}{5})$ vérifie $a^5 = 1$ et $a \neq 1$.
1. Trouver une équation du second degré à coefficients dans $\mathbf{Z}$ vérifiée par $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
2. En déduire une construction à la règle et au compas du pentagone régulier.

Exercice 8. Montrer que si p est premier et si $a \in \mathbf{Z}$ alors $a^p \equiv_p a$.

Exercice 9. Rechercher les $x \in \mathbf{Z}$ tels que $3x - 4$ est divisible par 11 et $5x + 2$ est divisible par 13.

Exercice 10. On considère une droite D du plan affine euclidien, un point F hors de D et un point P sur D. Expliquer comment construire à la règle et au compas le point M de la parabole de directrice D et de foyer F tel que la droite (MP) soit perpendiculaire à D.

Exercice 11. Soient $n \geq 2$, $a_1,\ldots,a_n$ dans $\mathbf{Z}$ et $r \in \mathbf{Q}$ tels que $r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Montrer que $r \in \mathbf{Z}$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit G le sous-ensemble de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ formé des générateurs du groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z},+)$.
1. Montrer que $(G,\times)$ est un groupe multiplicatif.
2. On prend $n = 24$. Donner les éléments de $(G,\times)$ et pour chacun d'eux son ordre.

Exercice 13. Soit $x \in [0,1]$. Construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt{x}$ étant donnés un segment de longueur 1 et un segment de longueur x.