Nom :
Prénom :

Université de Rennes 1
M1 MEFF Maths (2014-2015)
Algèbre, Géométrie, Algorithmique II
Contôle continu 7 (15 à 30 minutes)

On compose de préférence sur cette feuille en soignant la rédaction et sans document ni appareil électronique.

Exercice 1. (6 points) Caracatériser la conique euclidienne d'équation $9x^2+4xy+6y^2=10$ (nature, axes de symétrie orthogonale éventuels, intersection de la conique avec ces axes, asymptotes éventuelles).

Exercice 2. (6 points) Soient (A,B,C) et (A',B',C') deux triangles non dégénés d'un plan affine euclidien et soit ϕ affine telle que $\phi(A)=A'$, $\phi(B)=B'$ et $\phi(C)=C'$. Soit M tel que les droites AM, BM et CM coupent respectivement les segments $[B,C]$, $[C,A]$ et $[A,B]$. Comment construire à la règle et au compas $\phi(M)$?

Exercice 3. (8 points). On admet que si $n\in\mathbf{N}$ et $n\geq 2$ il existe $P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ à coefficients entiers tel que si $t\in\mathbf{R}$ alors $2\cos(nt)=P_n(2\cos(t))$.
1. Soient $n\in\mathbf{N}$ avec $n\geq 2$ et $a,b\in\mathbf{N}^*$ tels que $P_n(\frac{a}{b})=1$ et $pgcd(a,b)=1$. Montrer que $b=1$.
2. Soit $r\in\mathbf{Q}$ tel que $\cos(\pi r)\in\mathbf{Q}$. Montrer que $\cos(\pi r)\in\{-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\}$.
3. Donner une droite constructible à la règle et au compas d'équation $y=\tan(\alpha)x$ avec $\alpha/\pi\notin\mathbf{Q}$.
4. Montrer que si une figure non réduite à l'origine contient comme axes de symémtrie orthogonale les droites $y=0$ et $y=\frac{3}{4}x$ alors elle contient une infinité d'axes de symétrie.