Nom :
Prénom :

Université de Rennes 1
M1 MEFF Maths (2014-2015)
Algèbre, Géométrie, Algorithmique II
Contôle continu 5 (15 minutes)

On compose de préférence sur cette feuille en soignant la rédaction et sans document ni appareil électronique.

Exercice 1. (6 points) Soit $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Soit E_n l'ensemble des éléments compris entre 1 et $n-1$ et qui sont premiers avec n. On note $\phi(n)$ le cardinal de E_n. On considère un élément a de E_n. On rappelle qu'il existe une bijection p de E_n dans lui-même telle que si $b \in E_n$ alors $p(b) \equiv_n ab$.
1. Montrer que $a^{\phi(n)} \prod_{b \in E_n} b \equiv_n \prod_{b \in E_n} (a \cdot b) \equiv_n \prod_{b \in E_n} b$ et vérifier que $pgcd(n, \prod_{b \in E_n} b) = 1$.
2. En déduire que $a^{\phi(n)} \equiv_n 1$.

Exercice 2. (6 points) Soit $n \in \mathbf{N}$, $n > 4$ et n premier.
1. Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $2 \leq k \leq n-2$. Factoriser $k^2 - 1$ et en déduire que $k^2 \not\equiv_n 1$ puis montrer qu'il existe un unique $l \in \mathbf{N}$ tel que $2 \leq l \leq n-2$, $l \neq k$ et $kl \equiv_n 1$.
2. En déduire que $(n-1)! \equiv_n 1 \times (n-1) \equiv_n -1$.

Exercice 3. (8 points) On rappelle que $a = \cos(2\frac{\pi}{5}) + i\sin(2\frac{\pi}{5})$, $\overline{a}$, a^2 et $\overline{a^2}$ sont les racines complexes du polynôme $P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.
1. Trouver une équation du second degré vérifiée par $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
2. En déduire une construction à la règle et au compas du pentagone régulier.