Nom :
Prénom :

Université de Rennes 1
M1 MEFF Maths (2014-2015)
Algèbre, Géométrie, Algorithmique II
Contôle continu 3 (15 minutes)

On composera sur cette feuille. La rédaction sera soignée. Les documents sont interdits ainsi que les appareils électroniques. Barème : 8 points pour l'exercice 1 et 12 points pour l'exercice 2.

Exercice 1.
Soit $a,b \in \mathbf{Z}$. Donner un algorithme pour trouver $pgcd(a,b)$ et $u,v \in \mathbf{Z}$ tels que $ua+vb = pgcd(a,b)$.

Exercice 2.
Soit $(a,b,a',b') \in (\mathbf{N}^*)^4$. On rappelle que si $(a',b') \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ alors $r = \frac{a'}{b'}$ si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

1. Montrer qu'il existe $(A,B) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ unique tel que $pgcd(A,B) = 1$ et $r = \frac{A}{B}$ (écriture réduite).

2. Soit r d'écriture réduite $r = \frac{A}{B}$ et s d'écriture réduite $s = \frac{C}{D}$. On pose $B = B'P$ et $D = D'P$ avec $P = pgcd(B,D)$. Montrer que l'écriture réduite de $r+s$ est de la forme $r+s = \frac{E}{F}$ avec $E,F \in \mathbf{N}^*$ et $F = B'D'Q$.

3. Soient $p_1,...,p_k$ des nombres premiers tous différents. Montrer que $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_k}$ n'est pas entier.