Université de Rennes 1
M1 MEFF Maths (2013-2014)
Algèbre, Géométrie, Algorithmique II
Seconde session (60 minutes)

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Les documents sont interdits ainsi que les appareils électroniques.

Exercice 1. Soit $m,n,u,v \in \mathbf{Z}$ tels que $um+vn=1$ et $x,y \in \mathbf{Z}$.
1. Montrer que $z_0 = vnx+umy$ vérifie $z_0 \equiv_m x$ et $z_0 \equiv_n y$.
2. Trouver tous les $w \in \mathbf{Z}$ tels que $w \equiv_m 0$ et $w \equiv_n 0$.
3. Trouver tous les $z \in \mathbf{Z}$ tels que $z \equiv_m x$ et $z \equiv_n y$.
4. Rechercher $x \in \mathbf{N}$ tel que $x-5$ est divisible par 7, $x-4$ est divisible par 5 et $x < 35$.

Exercice 2. Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $m_1,\dots,m_d \in \mathbf{Z}$ des entiers deux à deux premiers entre eux et $x_1,\dots,x_d \in \mathbf{Z}$.
1. Soit $i \in \{1,\dots,d\}$. On pose $n_i = \prod_{j \neq i} m_j$. Montrer qu'il existe $u_i, v_i \in \mathbf{Z}$ tels que $u_i m_i + v_i n_i = 1$.
2. Soit $i,j \in \{1,\dots,d\}$ avec $i \neq j$. Montrer que $v_i n_i \equiv_{m_i} 1$ et $v_i n_i \equiv_{m_j} 0$.
3. Montrer que $z_0 = \sum_{i=1}^{d} v_i n_i x_i$ vérifie $z_0 \equiv_{m_i} x_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$.
4. Trouver tous les $w \in \mathbf{Z}$ tels que $w \equiv_{m_i} 0$ si $i \in \{1,\dots,d\}$.
5. Trouver tous les $z \in \mathbf{Z}$ tels que $z \equiv_{m_i} x_i$ si $i \in \{1,\dots,d\}$.
6. Rechercher $x \in \mathbf{N}$ pair tel que $x-5$ est divisible par 7, $x-4$ est divisible par 5 et $x < 70$.

Exercice 3. Soit p un entier naturel premier et $x \in \{1,\dots,p-1\}$.
1. Soit $u,v \in \mathbf{Z}$. Montrer que si $uv \equiv_p 0$ alors $u \equiv_p 0$ ou $v \equiv_p 0$.
2. Montrer que $(p-1)! \not\equiv_p 0$ où $(p-1)! = \prod_{a=1}^{p-1} a$.
3. Soit $b \in \{1,\dots,p-1\}$. Montrer qu'il existe un et un seul $a \in \{1,\dots,p-1\}$ tel que $xa \equiv_p b$.
4. En déduire que $(p-1)! \equiv_p \prod_{a=1}^{p-1} xa$.
5. Montrer que $(x^{p-1}-1)(p-1)! \equiv_p 0$.
6. En déduire que $x^{p-1} \equiv_p 1$.

Exercice 4. Soit d un entier naturel supérieur ou égal 3. Résoudre dans $\mathbf{N}^2$ l'équation $n^d - m^d = 3$.

Exercice 5. On note $C = \{x^2+y^2=1\}$ le cercle unité de $\mathbf{R}^2$. Soit $t \in \mathbf{R}$.
1. Montrer que l'intersection de la droite D_t d'équation $t(y-1)+x=0$ avec $C \setminus \{(0,1)\}$ contient un et un seul point $m(t) = (x(t),y(t)))$.
2. Calculer $x(t)$ et $y(t)$ ainsi définis.

Exercice 6. Soit $A=(-1,-1)$, $B=(1,1)$ et $M=(0,1)$.
1. Donner l'équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}$ dont le grand axe est $[A,B]$ et qui contient M.
2. Donner les sommets du petit axe de $\mathcal{E}$.
3. Calculer l'excentricité de $\mathcal{E}$.