Université de Rennes 1
M1 MEFF Maths (2013-2014)
Algèbre, Géométrie, Algorithmique II
Contôle continu 7 (bis) (66 minutes)

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Les documents sont interdits ainsi que les appareils électroniques.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère la relation $\equiv$ définie sur $\mathbf{Z}$ par $a \equiv b$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $a - b = kn$. Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $m, k \in \mathbf{N}$. On suppose que $k > 1$ et que k divise m et n. Montrer qu'il n'existe pas d'entier v tel que n divise $vm - 1$ et montrer qu'il existe $w \in \mathbf{N}$ vérifiant $0 < w < n$ et tel que n divise wm.

Exercice 3. Montrer que les groupes $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 4.
1. Donner les entiers n compris entre 0 et 10 tels qu'il existe $m \in \mathbf{Z}$ vérifiant $n \equiv_{11} m^5$.
2. Donner les entiers n compris entre 0 et 10 tels qu'il existe $m \in \mathbf{Z}$ vérifiant $n \equiv_{11} m^{10}$.
3. Résoudre dans $\mathbf{Z}^3$ l'équation $x^{10} - y^{10} + z^5 = 5$.

Exercice 5. On précise que

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
3^n mod 31	3	9	27	19	26	16	17	20	29	25	13	8	24	10	30	28	22	4	12	5	15	14	11	2	6	18	23	7	21	1

1. Pourquoi les générateurs de $(\mathbf{Z}/30\mathbf{Z}, +)$ autres que 1 sont les nombres premiers plus petits que 30 et différents de 2, 3 et 5 ?
2. Donner un isomorphisme entre $(\mathbf{Z}/30\mathbf{Z}, +)$ et $(\mathbf{Z}/31\mathbf{Z}^*, \times)$ et en déduire les générateurs de $(\mathbf{Z}/31\mathbf{Z}^*, \times)$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbf{N}^3$ l'équation $n^p - m^p = 2$.

Exercice 7. Soit $u, v, w \in \mathbf{N}^*$. On suppose que $u^2 = vw$ et que v et w sont premiers entre eux. Montrer que v et w sont des carrés.

Exercice 8. On rappelle que si d est premier si $x \in \mathbf{Z}$ n'est pas un multiple de d alors $x^{d-1} \equiv_d 1$ (Théorème de Fermat). Soient $p \neq q$ deux nombres premiers. On pose $n = pq$. Soient $b, c, k \in \mathbf{N}$ tels que $0 < b, c < n$ et $bc = 1 + k(p-1)(q-1)$. Soit enfin $a \in \mathbf{N}$ tel que $a < n$.
1. Vérifier les égalités

$$(a^b)^c \equiv_p a \cdot \left(a^{(p-1)}\right)^{k(q-1)} \text{ et } (a^b)^c \equiv_q a \cdot \left(a^{(q-1)}\right)^{k(p-1)}$$

2. Montrer à l'aide du théorème de Fermat les égalités $(a^b)^c \equiv_p a$ et $(a^b)^c \equiv_q a$.
3. En déduire que $(a^b)^c \equiv_n a$.

Exercice 9. On note $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité de $\mathbf{R}^2$. Soit $t \in \mathbf{R}$. On note $m(t) = (x(t), y(t))$ le point d'intersection de la droite D_t d'équation $t(y-1) + x = 0$ avec $C \setminus \{(0,1)\}$. On rappelle que

$$x(t) = \frac{2t}{t^2+1} \text{ et } y(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}.$$

Montrer que $m(t) \in \mathbf{Q}^2$ si et seulement si $t \in \mathbf{Q}$.

Exercice 10. Soit C la conique d'équation $4x^2 + y^2 = 1$. Donner en justifiant une famille $f_t, t \in [0, 2\pi[$ d'applications linéaires toutes différentes telles que $f_t(C) = C$ si $t \in [0, \pi[$.

Exercice 11. Soit $D_1 = \{x = 1\}$ et $C = \{x^2 + y^2 = 4\}$. Calculer $f(M) = d(M, D_1)$ et $g(M) = d(M, C)$ si $M \in \mathbf{R}^2$ puis caractériser l'ensemble Γ des points M tels que $d(M, D_1) = d(M, C)^2$, $x \geq 1$ et $x^2 + y^2 \geq 4$ (nature et axe de symétrie othogonale éventuel).

Exercice 12. Caractériser l'ensemble C d'équation $73x^2 + 52y^2 - 72xy - 25 = 0$ (nature et axes de symétrie othogonale éventuels).