

Nom :
Prénom :

Université de Rennes 1
M1 MEFF Maths (2013-2014)
Algèbre, Géométrie, Algorithmique II
Contrôle continu 4 (12 minutes)

On composera exclusivement sur cette feuille. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Les documents sont interdits ainsi que les appareils électroniques.

Exercice 1. On rappelle que si $n = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}$ avec $1 < p_1 < \dots < p_k$ premiers alors le nombre d'entiers naturels premiers avec n et qui lui sont inférieurs est $n(1 - \frac{1}{p_1}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{p_k})$.

1. Calculer le nombre de générateurs du groupe $\mathbf{Z}/2420\mathbf{Z}$.
2. Donner les éléments d'ordre 12 du groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}^*, \times)$.

Exercice 2. Deux équations diophantiennes.

1. Rechercher $x \in \mathbf{N}$ tel que $x - 3$ est divisible par 5, $x - 2$ est divisible par 7 et $x < 35$.
2. Rechercher $x \in \mathbf{N}$ tel que $x - 7$ est divisible par 11, $x - 3$ est divisible par 13 et $x < 143$.

Exercice 3. Soit $p \in \mathbf{N}$ premier, $m, g \in \mathbf{N}$ avec $0 < m, g < p$. On considère aussi $r, s \in \mathbf{N}$.

1. Soit $x \in \mathbf{N}$ tel que $0 < x < p$. Montrer qu'il existe $y \in \mathbf{N}$ avec $0 < y < p$ tel que p divise $xy - 1$.
2. Comment calculer m simplement (i.e. en utilisant la réponse à la question 1) en connaissant p, r, g^s et mg^{rs} mais sans connaître s et sans calculer s ? Que vaut m si $p = 13, r = 2, g^s = 6$ et $mg^{rs} = 11$?