

Nom :
Prénom :

Université de Rennes 1
M1 MEFF Maths (2013-2014)
Algèbre, Géométrie, Algorithmique II
Contrôle continu 1 (12 minutes)

On composera exclusivement sur cette feuille. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Les documents sont interdits ainsi que les appareils électroniques.

Exercice On rappelle qu'un sous-ensemble I de \mathbf{Z} est un idéal de \mathbf{Z} si et seulement si c'est un sous-groupe de \mathbf{Z} . On rappelle aussi qu'un sous-ensemble G de \mathbf{Z} est un sous-groupe de \mathbf{Z} si et seulement si il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $G = n\mathbf{Z}$ ou encore si et seulement si G est non vide et pour tous $p, q \in G$ on a $-p \in G$ et $p + q \in G$.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

1. Montrer que les sous-ensembles $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$ et $a\mathbf{Z} \cap b\mathbf{Z}$ sont des idéaux de \mathbf{Z} .

Soit $c, d \in \mathbf{N}$ tels que $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = c\mathbf{Z}$ et $a\mathbf{Z} \cap b\mathbf{Z} = d\mathbf{Z}$.

2. Soit $n \in \mathbf{Z}$. Montrer que n divise a et b si et seulement si n divise c .

3. Soit $m \in \mathbf{Z}$. Montrer que m est divisible par a et b si et seulement si m est divisible par d .