Exercice 9

On considère la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$

Soient v et w les deux suites extraites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \geq 0$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{\sqrt{2n+3}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \leq 0$$

Par conséquent la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

De plus la suite $(w_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à $\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et elle est donc convergente de limite 0. Aussi les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergentes et de même limite. Comme ce sont les suites extraites des termes de rangs pairs pour v et de rangs impairs pour w à partir de la suite u on en conclut que la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite la limite commune à v et w.