Exercice 8

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n=u_n+\frac{1}{2n+1}$

On va montrer que les deux suites sont adjacentes donc convergentes et de même limite.

Soit $n\in\mathbb{N}$ $\quad u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\geqslant 0$

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n &= u_{n+1}-u_n+\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+1}\\ &=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+1}\\ &=\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+2}\leqslant 0\end{aligned}$$

Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus la suite $(v_n-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et elle est donc convergente de limite 0. Ceci signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes (l'une croissante, l'autre décroissante et la différence qui tend vers 0) donc convergentes de même limite.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n=u_n+\frac{1}{n^2}$

On va encore montrer que les deux suites sont adjacentes donc convergentes et de même limite.

Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} \geqslant 0$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$$
$$= \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$$
$$= \frac{n^2 + (n+1)n^2 - (n+1)^3}{(n+1)^3 n^2}$$
$$= \frac{n^3 + 2n^2 - (n^3 + 3n^2 + 1)}{(n+1)^3 n^2}$$
$$= \frac{-(n^2+1)}{(n+1)^3 n^2} \leqslant 0$$

Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et elle est donc convergente de limite 0. Ceci signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes (l'une est croissante, l'autre est décroissante et leur différence tend vers 0) donc adjacentes de même limite.