Exercice 7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=3u_n-2n+3$

1) Montrons par récurrence que si $n\in\mathbb{N}$ $u_n\geqslant n$ – (P_n)

Initialisation. Au rang 0 on a $u_0=0\geqslant 0$. La propriété P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons P_n vraie et montrons qu'alors P_{n+1} l'est. Si on suppose P_n vraie on a $u_n\geqslant n$.

Or $u_{n+1}=3u_n-2n+3=(u_n+1)+2+2(u_n-n)$

Puisque $u_n\geqslant n$ on a $u_n+1\geqslant n+1$ et $u_n-n\geqslant 0$ et donc

$$u_{n+1}=(u_n+1)+2+2(u_n-n)\geqslant n+1+2+0\geqslant n+1$$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a
$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= (3u_n-2n+3)-u_n \\ &= 2(u_n-n)+3 \\ &\geqslant 3 \quad \text{car } u_n\geqslant n \end{aligned}$$

Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Puisque $u_n\geqslant n$ pour tout n, il vient

$\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

3) L'algorithme suivant répond à la question

```
1  Entrer A
2  u=0 , n=0
3  tant que u ≤ A
4       Faire n+1 ⟶ n
5             3u-2n+5 ⟶ u
6  Envoyer n
```

Alternative

```
4' Faire 3u-2n+3 ⟶ u
5'       n+1 ⟶ n
```

La différence entre 4 et 5 et 4' et 5' est que dans le premier cas on calcule $n+1$ puis u_{n+1} et dans le second cas on calcule u_{n+1} puis $n+1$.