Exercice 6

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2^n}$$

1) $x_0 = 1$

$$x_1 = \frac{1}{2} x_0 + \frac{1}{2^0} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2^1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$$

$$x_4 = \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{16} + \frac{1}{8} = \frac{9}{16}$$

2) soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 1$

On a $\quad x_n = \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2^n}$$

Par conséquent $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} x_n$

$$= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{4} x_{n-1} = -\frac{1}{4} x_{n-1}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \geqslant 0$. En effet $x_0 = 1 \geqslant 0$ et si $n \in \mathbb{N}$ est telque $x_n \geqslant 0$ alors $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2^n} \geqslant 0$ (fait établi donc par récurrence).

. Donc si $n \geqslant 1$ $\quad x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{4} x_{n-1} \leqslant 0$

On vient de prouver que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n=1$.

3) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive et elle est décroissante à partir du rang 1. Elle est donc minorée et décroissante à partir d'un certain rang. Ceci implique qu'elle converge. Soit $l\in\mathbb{R}$ sa limite. Puisque $x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2^n}$ et que $\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{2^n}=0$

Il vient $l=\lim\limits_{+\infty} x_{n+1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{+\infty} x_n+\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}l$

Donc $l=\frac{1}{2}l$ c'est-à-dire $l=0$.

La limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 0.

4) D'après 1) il est raisonnable de conjecturer que

si $n\in\mathbb{N}$ $\quad x_n=\frac{2n+1}{2^n}$ $\quad (P_n)$. On la prouve par récurrence.

Initialisation

La propriété (P_n) est vraie si $n=0,\dots,4$.

Hérédité

Soit $n\geq 0$. Supposons P_n vraie : $x_n=\frac{2n+1}{2^n}$

Alors $x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2^n}=\frac{2n+1}{2^n\times 2}+\frac{1}{2^n}$

$=\frac{2n+1}{2^{n+1}}+\frac{2}{2^{n+1}}$

$=\frac{2(n+1)+1}{2^{n+1}}$

Ainsi P_{n+1} est vraie si P_n vraie

On vient de prouver par récurrence que si $n\in\mathbb{N}$ $\quad x_n=\frac{2n+1}{2^n}$