Exercice 51

1) Soit $g : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $g(x) = x - 2 - \ln x$

Puisque $2 < e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1) < 3$

il vient $\ln 2 < 1 < \ln 3$

et donc $\ln 4 = 2 \ln 2 < 2$ et $1 < \ln 3$

Par conséquent $g(3) = 3 - 2 - \ln 3 < 3 - 2 - 1 = 0$

$g(4) = 4 - 2 - \ln 4 > 4 - 2 - 2 = 0$

Donc $g(3) < 0 < g(4)$. Or g est continue. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $l \in]3, 4[$ tel que $g(l) = 0$

De plus g est dérivable et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ si $x \in [1, +\infty)$

Par conséquent $g'(x) > 0$ sur $]1, +\infty)$ et donc g est une fonction strictement croissante donc injective. La fonction g ne peut s'annuler qu'au plus une fois. Par conséquent l est l'unique racine de l'équation $g(x) = 0$.

2) Soit f définie sur $[1 +\infty)$ par $f(x) = 2 + \ln x$

Puisque $\ln$ est strictement croissante et que $\ln 1 = 0$

Ex51 2/8

On a si $x \in [1, +\infty)$ $f(x) = 2 + \ln x \geq 2$.

Donc $f([1, +\infty)) \subset [1, +\infty)$.

Par conséquent la suite définie par $u_0 = 3$ et si $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 2 + \ln(u_n) = f(u_n)$ est bien définie.

On a $f(3) = 2 + \ln 3 \geq 2 + 1 = 3$ car $\ln 3 \geq 1$

$f(4) = 2 + \ln 4 = 2 + 2\ln 2 \leq 2 + 2 = 4$ car $\ln 2 \leq 1$

Puisque f est croissante ($\ln$ l'étant) il vient que

$$f([3,4]) \subset [f(3), f(4)] \subset [3,4].$$

Par conséquent la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associée à f et de premier terme $u_0 \in [3,4]$ est une suite dans $[3,4]$. Si $n \in \mathbb{N}$ $3 \leq u_n \leq 4$.

3) Soit $x \in [3,4]$ d'après le théorème des accroissements finis il existe y entre x et l tel que $|f(x) - f(l)| = |x - l|\,|f'(y)|$

Puisque $x, l \in [3,4]$ $y \in [3,4]$ et donc

$$\frac{1}{4} \leq f'(y) = \frac{1}{y} \leq \frac{1}{3}$$

On a donc $\frac{1}{4}|x - l| \leq |f(x) - l| = |f(x) - f(l)| \leq \frac{1}{3}|x - l|$ $(*)$

Appliquée à $x = u_0$ et donc $f(x) = u_1$ $(*)$ donne

$$\frac{|u_0-l|}{4} \leqslant |u_1-l| \leq \frac{|u_0-l|}{3}$$

Ex51 $\frac{3}{8}$

Pour montrer le résultat attendu dont on a vérifié la véracité au rang $n=0$, il suffit en vertu du principe de récurrence de montrer que si on a $\frac{|u_0-l|}{4^n} \leq |u_n-l| \leq \frac{|u_0-l|}{3^n}$ $(*)_n$

à un rang n alors on a $\frac{|u_0-l|}{4^{n+1}} \leq |u_{n+1}-l| \leq \frac{|u_0-l|}{3^{n+1}}$

Or $|u_{n+1}-l| = |f(u_n)-l|$ donc on suppose $(*)_n$. Ainsi

$$\frac{|u_0-l|}{4\,4^n} \leqslant \frac{|u_n-l|}{4} \leq |u_{n+1}-l| \leqslant \frac{|u_n-l|}{3} \leqslant \frac{|u_0-l|}{3\,3^n}$$

et donc $\frac{|u_0-l|}{4^{n+1}} \leq |u_{n+1}-l| \leqslant \frac{|u_0-l|}{3^{n+1}}$

4) Si $x>1$ on pose $\phi(x) = \frac{x(1+\ln x)}{x-1}$

- la fonction ϕ est dérivable.
- On a $\phi(l) = \frac{l\,(1+\ln l)}{l-1}$ avec $l-2-\ln l = 0$

donc on a $l-2 = \ln l$ et donc $\phi(l) = l\,\frac{(l-1)}{l-1} = l$

- $\phi'(x) = \frac{1+\ln x+1}{x-1} - \frac{x(1+\ln x)}{(x-1)^2} = \frac{[x-2-\ln x]}{(x-1)^2}$ si $x \in]1,+\infty)$

Ainsi $\phi'(\ell) = \dfrac{\ell - 2 - \ln \ell}{(\ell-1)^2} = \dfrac{g(\ell)}{(\ell-1)^2} = 0$

Le signe de ϕ' est le même que celui de g et donc on a

	1		ℓ	
g		$-$	0	$+$
ϕ'		$-$	0	$+$
ϕ		$\searrow$	ℓ	$\nearrow$

5/ Si $x > 1$ alors $x(1+\ln x) > x > x-1 > 0$ donc

$$\phi(x) = \frac{x(1+\ln x)}{x-1} > 1$$

Ainsi $\phi(]1,+\infty[) \subset]1,+\infty[$. Par conséquent la suite définie par récurrence par $v_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \phi(v_n)$ est bien définie et c'est une suite de réels strictement plus grands que 1.

Puisque $0 < \ln 4 < 2$ on a

$4 < 4(1+\ln 4) < 4 \times 3$ et donc

$$\phi(4) = \frac{4(1+\ln 4)}{4-1} < \frac{4 \times 3}{3} = 4$$

• Montrons par récurrence que si $n \in \mathbb{N}$
$\ell \leq v_n \leq 4$

Initialisation $v_0 = 4$ donc $\ell \leq v_0 \leq 4$

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\ell \leq v_n \leq 4$.

Puisque ϕ est croissante sur $[\ell, 4]$ on a

$$\ell = \phi(\ell) \leq \phi(v_n) = v_{n+1} \leq \phi(4) < 4$$

• Montrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

On a $v_1 = \phi(v_0) = \phi(4) < 4 = v_0$ Montrons donc que si $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} \leq v_n$. On le fait par récurrence

On vient de voir que c'est vrai pour $n = 0$ (initialisation)

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n+1} \leq v_n$ montrons $v_{n+2} \leq v_{n+1}$ (hérédité) Puisque f est croissante on a

$f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$ or $f(v_{n+1}) = v_{n+2}$ et $f(v_n) = v_{n+1}$

On a donc bien $v_{n+2} \leq v_{n+1}$.

On vient de montrer par récurrence que si $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} \leq v_n$.

Cela prouve que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

On a vu qu'elle était minorée par ℓ. Elle est donc

Convergente - Puisque ϕ est continue sur $[3,4]$ et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[3,4]$ et est une suite récurrente associée à ϕ sa limite est un point fixe de ϕ - On sait que l est un point fixe de ϕ et que si $n \in \mathbb{N}$ $l \leq v_n \leq 4$

Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ il suffit de montrer que ϕ n'a pas de point fixe sur $]l, 4]$.

On a $\phi'(x) = \dfrac{x-2-\ln x}{(x-1)^2}$.

Or $(x-1)^2 \geq 4$ sur $[3,4]$ et donc sur $]l,4]$

et $x-2-\ln(x) = g(x) \leq g(4)$ sur $]l,4]$ car g est croissante - donc $x-2-\ln(x) \leq 2-\ln 4 \leq 2$ sur $]l,4]$ Finalement $\phi'(x) \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ sur $]l,4]$ Donc si $x \in]l,4]$

$$\phi(x)-\phi(l) \leq \frac{1}{2}(x-l) \text{ et donc}$$

$$\phi(x) - l \leq \frac{1}{2}(x-l) \quad \text{car } \phi(l)=l$$

Ainsi $\phi(x) \leq \frac{1}{2}(x+l) < x$ si $x \in]l,4]$

Ex51 $\frac{7}{8}$

Ceci prouve que ϕ n'a pas de pt fixe sur $]l,4]$.

et donc on a établit que $\lim_{n \to +\infty} v_n = l$

6/ Puisque $\phi'(x) = \dfrac{x-2-\ln x}{(x-1)^2}$ si $x \in]1,+\infty)$

on a $\phi''(x) = \dfrac{(x-1)^2 - 2x(x-2-\ln x)}{x(x-1)^3}$ si $x \in]1,+\infty)$

Sur $[3,4]$ $0 \leq (x-1)^2 \leq 9$

$|x-2-\ln x| \leq |x-2| + |\ln x| \leq 2+2 = 4$

$|2x| \leq 8$

Donc $|(x-1)^2 - 2x(x-2-\ln x)| \leq 9 + 4\times 8$

De plus $|x(x-1)^3| \geq 3 \times 2^3 = 3\times 8$

Finalement $|\phi''(x)| \leq \dfrac{9+4\times 8}{3\times 8} \leq \dfrac{6\times 8}{3\times 8} = 2$

7/ Soit $v > l$. D'après Taylor Lagrange à l'ordre 1 entre l et v il existe $w \in]l,v)$ tel que

$\phi(v) = \phi(l) + \phi'(l)(v-l) + \dfrac{\phi''(w)}{2}(v-l)^2$

$\phi(v) = l + \dfrac{\phi''(w)}{2}(v-l)^2$

Si on applique ceci à $v = v_n$ on a $\phi(v_n) = v_{n+1}$

et donc $v_{n+1} = \ell + \frac{\phi''(w)}{2} (v_n - \ell)^2$

ou $v_{n+1} - \ell = \frac{\phi''(w)}{2} (v_n - \ell)^2$ et donc

puisque $|\phi''(w)| \leq 2$ puisque $\ell \leq w < v_n \leq 4$

$$|v_{n+1} - \ell| \leq \frac{2}{2} |v_n - \ell|^2$$

Cela à dire

$$|v_{n+1} - \ell| \leq |v_n - \ell|^2$$