EXO90 On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = a \geqslant 0$ $b_0 = b \geqslant 0$ $(b \neq a)$ et

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

1) les deux suites sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

Si $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ (i) $b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)$ (ii)

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n - 2\sqrt{a_n}\sqrt{b_n} + b_n\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \geqslant 0 \text{ (iii)}$$

Ainsi d'après (iii), si $n \geqslant 1$ $a_n \geqslant b_n$

Puis d'après (i), si $n \geqslant 1$, puisque $a_n \geqslant b_n$ $a_{n+1} \leqslant a_n$,

et d'après (ii), si $n \geqslant 1$, puisque $a_n \geqslant b_n$ $b_{n+1} \geqslant b_n$.

On a donc établit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 1, et $b_n \leqslant a_n$ si $n \geqslant 1$

Plus précisément $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2$

Donc si $a_n \neq b_n$ alors $a_{n+1} \neq b_{n+1}$. Or $a_0 \neq b_0$.

Donc le principe de récurrence implique que $a_n \neq b_n$ si $n \in \mathbb{N}$

Ainsi $b_n \leqslant a_n$ et $b_n \neq a_n$ si $n \geqslant 1$ c'est à dire

$b_n < a_n$ si $n \geqslant 1$.

2) On a $|a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left|\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)\right|$

$\leqslant \frac{1}{2}|a_n - b_n|$ si $n \in \mathbb{N}$

Par conséquent on a $|a_n - b_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - b_0|$ si $n \in \mathbb{N}$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n - b_n| = 0$

Or $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et (b_n) croissante.

Ce sont donc des suites adjacentes. Elles sont donc convergentes vers la même limite

3) Si $a=b$ alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les suites constantes égales à a (ou b).