Exercice 49

1) Etude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ défini par $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$

. Points fixes de f - $f(x) = x \iff x = 2 - \frac{1}{x}$

$$\iff x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\iff x = 1$$

La fonction f admet un seul point fixe 1

. $f([1,2]) \subset [1,2]$. En effet si $x \in [1,2]$ alors $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$ et donc $f(x) = 2 - \frac{1}{x} \in [1,2]$

. si $x \in]1,2]$ alors $f(x) - 1 = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

Or si $x \in]1,2]$ $x - 1 > 0$ et $0 \leq \frac{1}{x} < 1$ donc

$$0 < f(x) - 1 = \frac{x-1}{x} < x - 1$$

Ainsi si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $1 < u_n \leq 2$ alors

$1 < u_{n+1} < u_n \leq 2$. Or $u_0 = 2$.

Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs ds $]1,2]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante -

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une suite strictement décroissante et bornée converge - Puisque c'est une suite récurrente associée à la fonction continue f elle converge vers un point fixe de f. Or il n'y en a qu'un, le point 1 _ Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 _

2) Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $f(x) = -x^2 + 2x$

□ Points fixes de f. $\quad f(x)=0 \iff x = -x^2 + 2x$

$$\iff 0 = x(1-x)$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Les points fixes de f sont $x=0$ et $x=1$

□ La fonction f vérifie $f(x) = x(2-x)$. Elle est dérivable $f'(x) = 2(1-x)$. La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$, elle est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$, sa dérivée est nulle en 1 et 1 seulement. La fonction f atteint un maximum en 1.

On a
$$f(]-\infty, 0]) = f([2, +\infty[) =]-\infty, 0]$$
$$f([0,1]) = f([1,2]) = [0,1]$$

□ Si $u_0 = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle
Si $u_0 = 2$ alors $u_1 = 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir de $n=1$
Si $u_1 = 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1

□ si $x \in]0,1[$ alors $f(x) - x = x(1-x) > 0$ car $0 < x, 1-x < 1$
de plus $f(x) \in]0,1[$ car f strictement croissante sur $[0,1]$
et $f(0)=0$ et $f(1)=1$.
Par conséquent on a si $x \in]0,1[$ $\quad 0 < x < f(x) < 1$

Par conséquent si $u_0 \in]0,1[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 et défini par $u_{n+1} = f(u_n)$ est à valeurs dans $]0,1[$ et elle est strictement croissante. Comme elle est bornée et que f est continue, elle converge vers un point fixe de f qui est supérieur strictement à 0. Ça ne peut être que 1 qui est l'unique point fixe de f dans $]0, +\infty[$.

- si $u_0 \in]1,2[$ alors $f(u_0) = u_1 \in]0,1[$ et d'après ce qui précède $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]0,1[$ et strictement croissante à partir du rang 1 et elle converge vers 1
- Si $x < 0$ alors $f(x) = -x^2+2x < 2x < 0$

  Par conséquent si $u_0 < 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]-\infty, 0[$ et $u_{n+1} < 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc

  $$u_n < 2^n u_0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n u_0 = -\infty$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est majorée par une suite qui tend vers $-\infty$ tend également vers $-\infty$

- si $u_0 > 2$ alors $f(u_0) = u_1 < 0$ et d'après ce qui précède $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]-\infty, 0[$ à partir du rang 1 et elle diverge vers $-\infty$.

3) Etude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et si $n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n^2}$

- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

  La fonction f est dérivable de dérivée $f'(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$. C'est une fonction paire, à valeurs dans $]0,+\infty[$, décroissante strictement sur $[0,+\infty[$ (car $f'(x) < 0$ si $x > 0$). Elle admet un unique point fixe, c'est 1. [on a bien $f(1) = 1$, si $x < 0$ alors $f(x) \geq 0$ donc f n'a pas de point fixe, comme $f_{[0,+\infty[}$ est strictement décroissante elle a au plus 1 point fixe sur $[0,+\infty[$]
- On a $u_1 = 2$ et $u_2 = \frac{1}{5}$. Puisque f est strictement décroissante sur $[0,2] = [u_0, u_1]$ et que $u_2 = \frac{1}{5} \in [0,2]$ il vient en raison de la continuité de f que $f([0,2]) = f([u_0,u_1]) = [u_2, u_1] = [\frac{1}{5}, 2] \subset [0,2]$

Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ est à valeurs dans $[0,2]$.

Si $x\in[0,2]$ $\quad f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

$$f(f(x)) = \frac{2}{1+\left(\frac{2}{1+x^2}\right)^2} = \frac{2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+4}$$

Donc $$f(f(x))-1 = \frac{(1+x^2)^2-4}{(1+x^2)^2+4} = \frac{((1+x^2)+2)(1+x)(x-1)}{(1+x^2)^2+4}$$

Or $$((1+x^2)^2+4) - (((1+x^2)+2)(1+x)) = x^4-x^3+x^2-3x+2$$
$$= (x^3+x-2)(x-1)$$
$$= (x-1)^2(x^2+x+2)$$

Donc $((1+x^2)^2+4) - (((1+x^2)+2)(1+x)) > 0$ si $x\in[0,2]$ et $x\neq 1$

Donc $0 \leq \dfrac{((1+x^2)+2)(1+x)}{(1+x^2)^2+4} < 1$ si $x\in[0,2]$ et $x\neq 1$

et $|f(f(x))-1| < |x-1|$ et $f(f(x))-1$ et $x-1$ de même signe si $x\in[0,2]$ et $x\neq 1$

Ainsi puisque $u_0=0$ et $u_1=2$ on a $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0,1[$ et croissante strictement et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]1,2]$ et décroissante strictement.

Ces deux suites sont des suites récurrentes associées par $f\circ f$ continue et telle que $f\circ f([0,2]) \subset [0,2]$. Par conséquent elles convergent vers un point fixe de $f\circ f$ dans $[0,2]$. Ce ne peut être que 1 puisque $|f(f(x))-1|<|x-1|$ si $x\in[0,2]$ et $x\neq 1$

4) Etude de la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$

- Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - x^2$

La fonction f est strictement décroissante car sur $[0,1]$ la fonction carrée est strictement croissante. Elle est dérivable et $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$. Donc $f([0,1])$ et $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ est une bijection strictement décroissante.

La fonction f admet un unique point fixe c'est la racine positive de $f(x) - x = 0$ c'est-à-dire de $1 - x - x^2 = 0$

C'est le nombre $l = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in]0,1[$.

De plus $f'(l) = -2l = -(\sqrt{5}-1) < -1$ car $\sqrt{5} > 2$

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2 = f(u_n)$

Puisque $u_0 \in [0,1]$ et puisque $f([0,1]) \subset [0,1]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0,1]$.

Puisque f est continue, si elle converge, elle converge vers l'unique point fixe $l = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ de f.

On va montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors elle est constante égale à l à partir d'un certain rang.

- Puisque $f'(l) < -1$ il existe $\varepsilon > 0$ et $\lambda < -1$ tels que si $x \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ alors $f'(x) < \lambda$ et tels que $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\subset [0,1]$.

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors $|u_n - l| < \varepsilon$. Puisque $|f'| > |\lambda|$ et $|\lambda| > 1$ sur $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ $|u_{n+1} - l| \geqslant |\lambda|\,|u_n - l| \geqslant |u_n - l|$ si $n \geqslant N$

Par conséquent on a $|u_n - \ell| \geqslant |u_N - \ell|$ quel que soit $n \geqslant N$.

En effet, c'est vrai si $n = N$ et si c'est vrai pour un $n \geqslant N$ alors $|u_{n+1} - \ell| \geqslant |u_n - \ell| \geqslant |u_N - \ell|$ et donc $|u_{n+1} - \ell| \geqslant |u_N - \ell|$.

Or $\lim\limits_{+\infty} |u_n - \ell| = 0$: ce n'est donc possible que si $|u_n - \ell| = |u_N - \ell| = 0$.

On vient de prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$ converge si et seulement si il existe N tel que $u_N = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et alors la suite est constante égale à $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ à partir de ce rang.