Exercice 48 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N}$
$u_{n+1} = u_n(2-u_n)$

1) Si $a=0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle
Si $a=2$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang $n=1$
Si $a=1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1

En effet si on pose $f(x) = x(2-x)$ alors $u_{n+1} = f(u_n)$
et $f(0)=0$ $f(2)=0$ et $f(1)=1$.

2) On restreint f défini en 1) à $[0,1]$.
La fonction f est dérivable et $f'(x) = 2-2x$. On a
$f'(1)=0$ et $f'>0$ sur $[0,1[$. La fonction f est
donc strictement croissante sur $[0,1]$, et puisqu'elle
est continue et que $f(0)=0$ et $f(1)$, $f([0,1])=[0,1]$
et f est une bijection strictement croissante de $[0,1]$
dans lui-même.

3) ▫ Soit $g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto g(x) = f(x) - x = x(1-x)$
si $x\in[0,1]$ alors $(1-x)\in[0,1]$ et donc $g(x)=x(1-x) \geq 0$

▫ Montrons maintenant que $\forall n\in\mathbb{N}$ $0\leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$
On a vu en 2) que $f([0,1])\subset[0,1]$. Par conséquent,
puisque $u_0=a\in[0,1]$ et que $\forall n\in\mathbb{N}$ $f(u_n)=u_{n+1}$, la suite
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0,1]$. De plus $\forall n\in\mathbb{N}$, puisque $u_n\in[0,1]$
On a $g(u_n) = u_{n+1}-u_n \geq 0$. Finalement on a bien
pour tout $n\in\mathbb{N}$ $0\leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

4) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée par 1 donc elle converge
Puisque c'est une suite récurrente associée à f elle converge vers un point
fixe de f. Or $f(x)=x$ équivaut à $g(x)=0$ c'est à dire à $x=0$ ou $x=1$.
La limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 0 si $a=0$ et 1 si $a\in]0,1]$ (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante).