Exercice 47

1) Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

a) On cherche $x \in [0,1]$ tel que $x = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ $(*)$

$(*)$ est équivalent à $x \in [0,1]$ et $2x^2 - x - 1 = 0$

c'est à dire à $x \in [0,1]$ et $2(x-1)(x+\frac{1}{2}) = 0$

Ainsi $(*)$ admet une unique solution qui est $x = 1$

b) Soit $x \in [0,1]$. On a les équivalences suivantes

$f(x) \geq x \iff \frac{1+x}{2} \geq x^2$ (en élevant au carré) $x \geq 0$

$\iff 2x^2 - x - 1 \leq 0$

$\iff 2(x-1)(x+\frac{1}{2}) \leq 0$

$\iff x - 1 \leq 0$ (car $x + \frac{1}{2} \geq 0$ si $x \in [0,1]$)

$\iff x \leq 1$

Or sur $[0,1]$ on a toujours $x \leq 1$. Par conséquent sur $[0,1]$ $f(x) \geq x$.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ si $n \in \mathbb{N}$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car $u_0 \in [0,1]$ et $f([0,1]) \subset [0,1]$ puisque $f(x) \geq 0$ et $f(x) \leq x \leq 1$ d'après 1/b)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car d'après 1/b) on a si $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$.

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle est majorée (car à valeurs dans $[0,1]$) elle est convergente et sa limite ℓ est dans $[0,1]$ car la suite est à valeurs dans ce segment.

Puisque f est continue sur $[0,1]$ et $\ell \in [0,1]$. La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $f(\ell)$.

Mais $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, donc la limite de $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est ℓ qui est la limite de $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi $\ell = f(\ell)$. La limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc un point fixe de f : c'est donc 1 qui est l'unique point fixe de cette fonction.