Exercice 46 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1) La fonction f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+2)^2} = \left(\dfrac{2x}{x^2+2}\right)\left(\dfrac{1}{x^2+2}\right)$

De $0 \leq (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ si $x \in \mathbb{R}$

il vient $x^2 + 2 - 2x = (x^2 - 2x + 1) + 1 \geq 1$

donc $x^2+2 \geq 2x$ et $|x^2+2| = |x|^2 + 2 \geq 2|x| = |2x|$ si $x \in \mathbb{R}$

Ainsi $\left|\dfrac{2x}{x^2+2}\right| = \dfrac{|2x|}{|x^2+2|} \leq 1$ si $x \in \mathbb{R}$

de plus $|x^2+2| \geq 2$ donc

et donc $|f'(x)| = \left|\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}\right| = \left|\dfrac{2x}{x^2+2}\right| \times \dfrac{1}{|x^2+2|} \leq 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{3}{4}$

Ainsi si $x \in \mathbb{R}$ $|f'(x)| \leq \dfrac{3}{4}$.

Considérons maintenant $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x \neq y$ il existe z entre x et y tel que $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(z)$

on a donc $\dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = |f'(z)| \leq \dfrac{3}{4}$ et finalement

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x-y|$$

Cette inégalité est aussi vraie si $x = y$, et alors $|f(x) - f(x)| = 0$ ainsi que $\dfrac{3}{4}|x-x| = 0$.

Ainsi $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{3}{4}|x-y|$

2) • Montrons que si $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $|f^{\circ n}(x) - f^{\circ n}(y)| \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n |x-y|$

où $f^{\circ n}$ désigne l'itérée n-ème de f.

– Cette propriété est vraie au rang $n = 0$:

$$|f^{\circ 0}(x) - f^{\circ 0}(y)| = |x-y| = \left(\frac{3}{4}\right)^0 |x-y| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 |x-y|.$$

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|f^{\circ n}(x) - f^{\circ n}(y)| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |x-y|$ (hypothèse de récurrence)

Alors $|f^{\circ n+1}(x) - f^{\circ n+1}(y)| = |f(f^{\circ n}(x)) - f(f^{\circ n}(y))|$ on applique 1) avec $f^{\circ n}(x)$ et $f^{\circ n}(y)$

$$\leq \left(\frac{3}{4}\right) |f^{\circ n}(x) - f^{\circ n}(y)|$$ on applique l'hypothèse de récurrence

$$\leq \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n |x-y|$$

Ainsi $|f^{\circ n+1}(x) - f^{\circ n+1}(y)| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} |x-y|$

□ Montrons que f admet un point fixe l

On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{2}{3}$. Donc l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$, qui est une fonction continue comme f, est telle que $g(0) = \frac{1}{2} > 0 > g(1) = -\frac{1}{3}$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $l \in]0,1[$ tel que $g(l) = 0$ c'est à dire $f(l) = l$: l est un point fixe de f

□ Montrons que l est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est donc convergente.

En appliquant les inégalités $|f^{\circ n}(x) - f^{\circ n}(y)| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |x-y|$ avec $x = u_0 \in [0,1]$ et $y = l$ il vient, puisque $f^{\circ n}(u_0) = u_n$ et que $f^{\circ n}(l) = l$

$$|u_n - l| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - l| \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $\left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, le théorème des gendarmes assure que

$|u_n - l| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite l.

On a prouvé que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l point fixe de $f\in[0,1]$. Ce point fixe est unique : si l' point fixe de f on a

$$|f(l)-f(l')| = |l-l'| \text{ mais aussi } |f(l)-f(l')| \leq \frac{3}{4}|l-l'|,$$

donc $|l-l'| \leq \frac{3}{4}|l-l'|$ et ceci n'est possible que si $|l-l'|=0$ c'est à $l=l'$.

3) On sait que $|u_n - l| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - l|$ et comme $u_0\in[0,1]$ (par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) et $l\in[0,1]$ (question 2).

On a $|u_n - l| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

On a $0 < \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} < \frac{1}{2}$

donc $0 < \left(\frac{3}{4}\right)^{30} < \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < 10^{-3}$

et $0 < \left(\frac{3}{4}\right)^{24} < \frac{1}{2^8} = \frac{1}{128} < 10^{-2}$

Ainsi $0 < \left(\frac{3}{4}\right)^{54} < 10^{-5}$

Finalement on pose $N = 54$. On a, si $n \geqslant 54$,

$$|u_n - l| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{54} < 10^{-5}$$

<u>Remarque</u> le N trouvé n'est pas le plus petit mais il est facile à trouver sans outil.