Exercice 45 Soit $a<b$ deux réels $I=[a,b]$ et $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ contractante de coefficient de contraction γ. On suppose I stable par f.

1) Le fait que f est contractante de coefficient de contraction γ se traduit par le fait que si $x,y\in[a,b]$ alors $|f(x)-f(y)|\leq\gamma|x-y|$ et $\gamma<1$.
Soit donc $\varepsilon>0$. On pose $\eta>0$ alors si $x,y\in[a,b]$ sont tels que $|x-y|<\varepsilon=\eta$ alors $|f(x)-f(y)|\leq\gamma|x-y|<|x-y|<\varepsilon$
La fonction f est donc continue sur $[a,b]$

2) On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=I$ et si $n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}=f(u_n)$

a) On a supposé I stable par f. Ça signifie que $f(I)\subset I$.
C'est cette hypothèse qui garantit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n\in I$ et u_n bien défini donc.
Alors, puisque $u_{n+1}=f(u_n)$ par définition et que $u_n\in I$ qui est le domaine de définition de f u_{n+1} est bien défini et puisque $f(I)\subset I$ $u_{n+1}\in I$.
On a montré l'hérédité de la propriété "u_n bien défini et $u_n\in I$"
Cette propriété est bien vérifiée en $n=0$ $(u_0\in I)$. Donc elle est vérifiée pour tout n.

b) Soit $k\in\mathbb{N}$. Montrons par récurrence que $|u_{k+1}-u_k|\leq\gamma^k|u_1-u_0|$
La propriété P_k annoncée est clairement vraie pour $k=0$: $|u_1-u_0|\leq\gamma^0|u_1-u_0|$
puisque $\gamma^0=1$
Il reste à vérifier l'hérédité de P_k. Soit $k\in\mathbb{N}$. On suppose P_k vraie et prouvons P_{k+1}
Par hypothèse de récurrence $|u_{k+1}-u_k|\leq\gamma^k|u_1-u_0|$. Puisque f est γ-contractante $|u_{k+2}-u_{k+1}|=|f(u_{k+1})-f(u_k)|\leq\gamma|u_{k+1}-u_k|$.
Ainsi $|u_{k+2}-u_{k+1}|\leq\gamma|u_{k+1}-u_k|\leq\gamma\times\gamma^k|u_1-u_0|=\gamma^{k+1}|u_1-u_0|$

et donc P_{k+1} est vraie.

On vient d'établir par récurrence que si $k\in\mathbb{N}$ $|u_{k+1}-u_k|\leq \gamma^k|u_1-u_0|$

Montrons maintenant par récurrence sur $p\geq 1$, la propriété Q_p suivante :

$$\text{Si } n\in\mathbb{N} \quad |u_{n+p}-u_n|\leq \sum_{j=n}^{n+p-1}\gamma^j|u_1-u_0|.$$

Initialisation : la propriété P_1 est vraie. Elle vient d'être établie

$$\text{si } n\in\mathbb{N} \text{ alors } |u_{n+1}-u_n|\leq\gamma^n|u_1-u_0|$$

Hérédité. Soit $p\geq 1$ tel que Q_p vraie. Prouvons Q_{p+1}.

$$\text{Puisque } Q_p \text{ vraie si } n\in\mathbb{N} \quad |u_{n+p}-u_n|\leq \sum_{j=n}^{n+p-1}\gamma^j|u_1-u_0|$$

or $|u_{n+p+1}-u_n| = |u_{n+p+1}-u_{n+p}+u_{n+p}-u_n|$ } inégalité triangulaire

$$|u_{n+p+1}-u_n|\leq |u_{n+p+1}-u_{n+p}|+|u_{n+p}-u_n|$$

D'après Q_1 $|u_{n+p+1}-u_{n+p}|\leq\gamma^{n+p}|u_1-u_0|$.

D'après l'hypothèse de récurrence $|u_{n+p}-u_n|\leq \sum_{j=n}^{n+p-1}\gamma^j|u_1-u_1|$.

Ainsi $|u_{n+p+1}-u_n|\leq|u_{n+p+1}-u_{n+p}|+|u_{n+p}-u_n|$

$$|u_{n+p+1}-u_n|\leq\gamma^{n+p}|u_1-u_0|+\sum_{j=n}^{n+p-1}\gamma^j|u_1-u_0|$$

$$|u_{n+p+1}-u_n|\leq\sum_{j=n}^{n+p}\gamma^j|u_1-u_0|$$

Q_{p+1} est donc vérifiée sous l'hypothèse que Q_p le soit.

On vient de prouver par récurrence sur p que

$$\forall p\in\mathbb{N}\ p\geq 1\ \forall n\in\mathbb{N}\ |u_{n+p}-u_n|\leq\sum_{j=n}^{n+p-1}\gamma^j|u_1-u_0|$$

Or si $p \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=n}^{n+p-1} \gamma^j |u_1 - u_0| = \gamma^n |u_1 - u_0| \sum_{k=0}^{p-1} \gamma^k = \frac{\gamma^n (1-\gamma^p)}{1-\gamma} |u_1 - u_0|$$

Or $0 \leq \gamma < 1$ Donc $\dfrac{\gamma^n (1-\gamma^p)}{1-\gamma} |u_1 - u_0| \leq \dfrac{\gamma^n}{1-\gamma} |u_1 - u_0|$

Ainsi $\displaystyle\sum_{j=n}^{n+p-1} \gamma^j |u_1 - u_0| \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} |u_1 - u_0|$

Par conséquent si $p \in \mathbb{N}$ $p \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$ puisque

$|u_{n+p} - u_n| \leq \displaystyle\sum_{j=n}^{n+p-1} \gamma^j |u_1 - u_0|$ et que $\displaystyle\sum_{j=n}^{n+p-1} \gamma^j |u_1 - u_0| \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} |u_1 - u_0|$

il vient $|u_{n+p} - u_n| \leq \dfrac{\gamma^n}{1-\gamma} |u_1 - u_0|$

c) Puisque $0 \leq \gamma < 1$ la suite $\dfrac{\gamma^n}{1-\gamma} |u_1 - u_0|$ décroît vers 0. Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq N$ $0 \leq \dfrac{\gamma^n}{1-\gamma} |u_1 - u_0| < \varepsilon$

Alors d'après b) $\forall n, p \in \mathbb{N}$

$n \geq N \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$ (le cas $p=0$ est évident)

Ceci signifie que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy donc qu'elle converge. Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ sa limite l également

d) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $l \in I$.
Puisque f est continue en $l \in I$, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$

est aussi convergente de limite $f(l)$.
Or si $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$ donc la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite extraite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle est donc convergente vers l. Par unicité de la limite on a $l = f(l)$.
La limite l de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un point fixe de f.

Montrons que c'est le seul. Soit donc $l' \in I$ tel que $f(l') = l'$. On a $|l - l'| = |f(l) - f(l')| \leq \gamma |l - l'|$ car f est γ-contractante. Donc

$$(1-\gamma)|l-l'| \leq 0.$$

Or $0 \leq \gamma < 1$ donc $1 - \gamma > 0$ et donc $|l - l'| \leq 0$. Comme c'est une valeur absolue ce n'est possible que si $|l - l'| = 0$ et donc $l = l'$. Ça prouve l'unicité du point fixe.