Exercice 44 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable tel qu'il existe $k \in]0,1[$ qui majore $|f'(x)|$ si $x \in \mathbb{R}$.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est dérivable et si $x \in \mathbb{R}$ $g'(x) \leq k - 1 < 0$

Soit donc $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. D'après le théorème des accroissements finis il existe y entre 0 et x tel que

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(y) \quad \text{et donc } g(x) = g(0) + g'(y)\, x$$

Si $x > 0$ on déduit de $g(x) = g(0) + g'(y)x$ et de $g'(y) \leq k-1$

que $g(x) \leq g(0) + (k-1) \times x$

Or $\lim\limits_{+\infty} g(0) + (k-1) \times x = -\infty$ car $k - 1 < 0$

donc par comparaison $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$

Si $x < 0$ on déduit de $g(x) = g(0) + g'(y)\, x$ et de $g'(x) \leq k-1$

que $g(x) \geq g(0) + (k-1)\, x$

Or $\lim\limits_{-\infty} g(0) + (k-1) \times x = +\infty$ car $k-1 < 0$

donc par comparaison $\lim\limits_{-\infty} g = +\infty$

Puisque $g' \leq k-1 < 0$ la fonction g est strictement décroissante donc injective

Puisque $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} = +\infty$, comme g est continue on a $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc g est surjective.

Aussi g est bijective. En particulier il existe un unique c tel que $g(c) = 0$. C'est à dire, il existe un unique c tel que $f(c) - c = 0$ i.e un unique point fixe

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = 1 + \ln(ch(x))$

La fonction h est dérivable et $h'(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

Par conséquent si $x \in \mathbb{R}$ $|h'(x)| < 1$
(puisque $e^{x}, e^{-x} > 0$ $|e^{x} - e^{-x}| < |e^{x}| + |e^{-x}| = |e^{x} + e^{-x}|$)

Recherchons un point fixe de h

On a x point fixe de h ssi $h(x) = x$

Or $h(x) = x \iff x = 1 + \ln(ch\, x)$

$\iff x - 1 = \ln(ch(x))$

$\iff \dfrac{e^{x}}{e} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

$\iff 0 = (e-2)e^{x} + e\, e^{-x}$

Or $e - 2 > 0$, $e^{x} > 0$ et $e > 0$, $e^{-x} > 0$ donc

$(e-2)e^{x} + e\, e^{-x} > 0$ et l'équation $0 = (e-2)e^{x} + e\, e^{-x}$

n'a pas de solution.

La fonction h n'admet pas de point fixe