Exercice 43 Si $n \in \mathbb{N}$ on note $v_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$

1/ D'après Taylor Lagrange à l'ordre 3 il existe $c \in]0, \frac{\pi}{2^n}[$ tel que

$$\sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{\pi}{2^n} - \left(\frac{\pi}{2^n}\right)^3 \frac{\sin(c)}{6} \quad \text{et donc } \pi - v_n = \frac{\pi^3}{2^{2n}} \frac{\sin(c)}{6}$$

et comme $|\sin c| \leq 1$ il vient

$$|\pi - v_n| \leq \frac{\pi^3}{2^{2n}} \times \frac{1}{6} = \frac{\pi^3}{6.4^n} \quad \text{et donc } |\pi - v_n| \leq \frac{\pi^6}{6 \times 4^n}$$

2/ D'après Taylor Lagrange à l'ordre 5 il existe $d \in]0, \frac{\pi}{2^n}[$ tel que

$$\sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{\pi}{2^n} - \left(\frac{\pi}{2^n}\right)^3 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{\pi}{2^n}\right)^5 \times \frac{\sin(d)}{120} \quad \text{et donc}$$

$$\pi - v_n - \frac{\pi^3}{2^{2n}} \times \frac{1}{6} = \frac{\pi^5}{2^{4n}} \frac{\sin(d)}{120}$$

et comme $|\sin d| \leq 1$ il vient

$$\left|\pi - v_n - \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}\right| \leq \frac{\pi^5}{120 \; 4^{2n}}$$

3/ Soit λ réel on pose $w_n = \lambda v_{n+1} + (1-\lambda) v_n$

On a
$$\pi - w_n = \lambda(\pi - v_{n+1}) + (1-\lambda)(\pi - v_n)$$
$$= \lambda\left(\pi - v_{n+1} - \frac{\pi^3}{6 \times 4^{n+1}}\right) + (1-\lambda)\left(\pi - v_n - \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}\right) + \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}\left[\frac{\lambda}{4} + 1 - \lambda\right]$$

L'idée de la seconde écriture est de faire apparaître les différences de 2/ pour pouvoir ensuite utiliser l'inégalité de 2/ avec n et $n+1$.

Si $\lambda = 2$ alors $\frac{\pi^3}{6 \times 4^n}\left[\frac{\lambda}{2} + 1 - \lambda\right] = 0$ et on a donc

$$\pi - w_n = 2\left(\pi - v_{n+1} - \frac{\pi^3}{6 \times 4^{n+1}}\right) - \left(\pi - v_n - \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}\right)$$

En passant aux valeurs absolues et en utilisant l'inégalité triangulaire il vient

$$|\pi - w_n| \leq 2\left|\pi - v_{n+1} - \frac{\pi^3}{6 \times 4^{n+1}}\right| + \left|\pi - v_n - \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}\right|$$

On déduit alors de 2/ appliqué à n et n+1

$$|\pi - W_n| \leqslant 2 \frac{\pi^5}{120\ 4^{2(n+1)}} + \frac{\pi^5}{120\ 4^{2n}} = \frac{\pi^5}{80\ 4^{2n}}$$

On vient de montrer que si on pose $W_n = 2V_{n+1} - V_n$

alors $$|\pi - W_n| \leqslant \frac{K}{4^{2n}} \quad \text{avec} \quad K = \frac{\pi^5}{80}$$