Exercice 42 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$

Soit $M_k = \sup_{\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$ si $k = 0, 1, 2, 3$. On suppose M_0 et M_3 finis

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$

D'après Taylor Lagrange il existe $c, d \in [0, h]$ tels que

$$(1) \quad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x+c)}{6}h^3$$

$$(2) \quad f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(x-d)}{6}h^3$$

Donc en sommant (1) et (2) on obtient

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{f'''(x+c)}{6}h^3 - \frac{f'''(x-d)}{6}h^3$$

et donc $\boxed{f''(x) = \frac{1}{h^2}\left(f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - \frac{f'''(x+c)}{6}h^3 + \frac{f'''(x-d)}{6}h^3\right)}$

Par conséquent

$$|f''(x)| \leqslant \frac{1}{h}\left(|f(x+h)| + |f(x-h)| + 2|f(x)|\right) + \frac{h}{6}\left(|f'''(x+c)| + |f'''(x-d)|\right)$$

et donc $\boxed{|f''(x)| \leqslant \frac{4M_0}{h^2} + h\frac{M_3}{3} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}}$

En faisant la différence entre (1) et (2) il vient

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{f'''(x+c)}{6}h^3 - \frac{f'''(x-d)}{6}h^3$$

et donc $\boxed{f'(x) = \frac{1}{2h}\left(f(x+h) - f(x-h) - \frac{f'''(x+c)}{6}h^3 + \frac{f'''(x-d)}{6}h^3\right)}$

Par conséquent

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2h}\left(|f(x+h)| + |f(x-h)|\right) + \frac{h^2}{12}\left(|f'''(x+c)| + |f'''(x-d)|\right)$$

et donc $\boxed{|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + h^2\frac{M_3}{6} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}}$

2) En prenant $h=1$ on obtient que

$$|f''(x)| \leq 4M_0 + M_3 \quad \text{et} \quad |f'(x)| \leq M_0 + \frac{M_3}{6}$$

Par conséquent M_1 est fini et majoré par $M_0 + \dfrac{M_3}{6}$ et M_2 également et majoré par $4M_0 + M_3$

3) En remplaçant h par $\left(\dfrac{M_0}{M_3}\right)^{1/3}$ on obtient que

$$|f'(x)| \leq \left(1+\frac{1}{6}\right)\sqrt[3]{M_0^2 M_3}$$

et donc $\boxed{M_1 \leq \dfrac{7}{6}\sqrt[3]{M_0^2 M_3}}$

En remplaçant h par $\left(\dfrac{M_0}{M_3}\right)^{1/3}$ on obtient aussi que

$$|f''(x)| \leq \left(4+\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{M_0 M_3^2}$$

et donc

$$\boxed{M_2 \leq \frac{13}{3}\sqrt[3]{M_0 M_3^2}}$$